Google

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse http://books.google.com

QA
69
.J86

Z 20 1

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS

ET INTRODUCTION

A LA GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS,

PAR

E. JOUFFRET,

Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite,
Ancien Élève de l'École Polytechnique,
Officier de la Légion d'honneur,
Officier de l'Instruction publique,
Membre de la Société mathématique de France.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1903

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

M. Poincaré en donne l'explication suivante. La conception que nous avons de l'espace a pour base une image qui se forme sur notre rétine et qui a *deux* dimensions. L'idée d'une troisième dimension résulte de l'effort d'accommodation qu'il faut faire avec nos yeux et de la convergence qu'il faut leur donner; elle dépend de ces *deux* indications qui sont distinctes, mais qui se trouvent toujours concordantes et équivalent ainsi à *une seule*. Ceux des éléments de nos sensations visuelles qui concourent à former en nous la notion de l'espace sont donc, en définitive, des fonctions de *trois* variables indépendantes, et c'est de là que viendrait le sentiment de *trois dimensions*. On conçoit d'ailleurs la possibilité d'un état de choses tel que les deux indications qui constituent ensemble la troisième variable soient indépendantes l'une de l'autre au lieu d'être liées entre elles par une relation constante; alors nous attribuerions sans doute *quatre dimensions* à l'espace visuel.

Voici une autre explication, d'après Hinton.

L'analyste peut, ou du moins a pu jusqu'à nos jours, interpréter les phénomènes de la Nature avec la conception suivante de l'espace. Pour lui, celui-ci n'est pas autre chose qu'un *Système de trois variables,* qu'il appelle *des distances,* ou *des coordonnées* (1), et auxquelles il demande uniquement de pouvoir prendre toutes les valeurs imaginables, chacune indépendamment des deux autres; un point de l'espace

---

Géométrie (*Rev. de métaph. et de morale,* 1895, p. 631, 646 et 1897, p. 66). — NEWCOMB, *The philosophy of hyperespace* (*Bull. of the amer. math. Society*, fév. 1898. — HINTON, *Many Dimensions,* dans *Scientific Romances*, in-12. Londres, 1896.

L'*Étude sur l'espace et le temps,* par Lechalas, Ingénieur en chef des Ponts-et-Chaussées (in-8°, Paris, 1896), est un excellent exposé de la *question de l'Espace;* il faut que l'on voie aussi la discussion de ce livre, par L. Couturat, dans la *Rev. de métaph. et de morale,* 1896, p. 646 à 669.

(1) Leur signification absolue lui importe peu et il peut même la changer sous certaines conditions; *voyez* §§ 17, 18 et 19.

n'est pour lui qu'un système de valeurs *déterminées* de ces trois variables, et la connaissance du monde matériel que celle des relations qu'elles ont entre elles et avec *le temps,* dans un certain ensemble de circonstances appelé *phénomène.* C'est sur cette base qu'ont été édifiés les immortels travaux de Laplace, Lagrange, Poisson..., etc.

Trois variables, voilà donc à quoi se réduisent, en fin de compte et en combinant leurs effets, les mille et mille causes qui se jouent autour de nous et engendrent tout ce qui nous fait jouir ou souffrir. Peut-être est-ce tout simplement ce fait qui, senti confusément par l'esprit de nos pères, s'y serait fixé, à la longue, sous la forme plus ou moins gratuite d'une chose appelée *espace* et douée de trois dimensions, d'ailleurs assez imprécises : par une de ses opérations favorites, ledit esprit aurait substitué cette chose *concrète* au système analytique *abstrait.*

Ce cas n'est pas le seul où l'on aurait vu l'instinct populaire devancer le mathématicien; voyez, par exemple, ce qui est dit au sujet de « Treize à table » dans les *Contes de la veillée* de Ch. Nodier et, par M. Dormoy, dans le *Journal des Actuaires français,* fascicule de janvier 1875, p. 62.

Or il se trouve que les trois variables ne suffisent pas à l'Analyse depuis que, de plus en plus puissante et exigeante, elle a porté ses recherches dans le *monde des petites dimensions,* que nos pères ignoraient; la raison de cette insuffisance est qu'une étude plus approfondie lui découvre des effets dont les causes étaient jusque-là comme inexistantes. Dès lors, elle est amenée, bon gré mal gré, à remplacer pour ces nouvelles études son système de *trois* variables par un de *quatre.* On verra plus loin (¹) que la quatrième, qui n'intervient qu'à propos de très petites grandeurs et de très petits

(¹) A la fin de l'Avant-propos et au § 48.

mouvements, se traduit, au concret, par une quatrième épaisseur très petite. Plus l'étude de la Nature deviendra minutieuse, plus il faudra, comme dans les *Méthodes d'approximations successives*, augmenter le nombre des variables et, en conséquence, celui des dimensions spatiales, au moins dans l'ordre de petitesse considéré.

Si cette seconde explication est la bonne, ne pourrait-il pas se produire progressivement, dans notre mentalité mise aux prises avec des causes de plus en plus nombreuses, une transformation correspondante à celle de l'Analyse et ayant pour résultat de donner à nos lointains descendants la sensation de se voir, et de concevoir l'espace, avec quatre dimensions ?

Le géomètre conçoit l'espace divisé en une infinité de *tranches infiniment minces* qu'il appelle des *plans,* celles-ci en une infinité de *bandes infiniment étroites* qu'il appelle des *droites,* et celles-ci en une infinité de *segments infiniment courts* qu'il appelle des *points*. Quelquefois, ce qu'il appelle *plans, droites* et *points,* c'est, non pas les *tranches,* les *bandes* et les *segments* eux-mêmes, mais les *séparations,* dénuées de toute espèce d'épaisseur et de réalité, que sa pensée voit entre eux. Ces divisions ou ces séparations, il en fait autant d'êtres particuliers qu'il écarte les uns des autres, avec ou sans les choses qu'ils contiennent; il les déplace de toutes façons et les entrecroise à sa guise; il les peuple de figures créées par son imagination, liées entre elles par des lois dont il devient lui-même l'esclave. Suivant l'une ou l'autre manière dont la conception de ces sortes de *cloisons,* de *tringles* et de *billes* s'est formée en lui, il dit — que, *sur* les trois dimensions, il y en a *une* infiniment petite chez les plans, *deux* chez les droites, *trois* chez les points, — ou bien qu'*au lieu* d'avoir

trois dimensions, les plans *n'en ont que deux*, les droites *n'en qu'une,* et les points *n'en ont pas.* De toute façon, les divisions sont purement idéales, et elles peuvent être faites d'une infinité de manières.

Prenant la série en sens inverse, c'est-à-dire à partir *du point,* la géométrie qui va nous occuper la poursuit *plus loin que l'espace.*

Celui-ci n'est également pour elle qu'une *tranche* (nous ne pouvons plus diversifier les mots et nous cueillons le dernier laissé par la série commencée) qu'une *tranche infiniment mince* au milieu d'une infinité d'autres espaces formant autant de *tranches* pareilles dans une étendue *à quatre* dimensions. Espaces qu'à leur tour le géomètre peuple, déplace, entrecroise comme il l'entend.

Nous appellerons ÉTENDUE l'ensemble que forment ces espaces en nombre infini, et qui est leur contenant comme chacun d'eux est le contenant d'une infinité de plans, chacun de ceux-ci le contenant d'une infinité de droites, chacune de celles-ci le contenant d'une infinité de points. Rien n'empêche de considérer l'étendue comme étant englobée à son tour dans un champ à cinq dimensions, et ainsi de suite indéfiniment.

Telle est la *conception des champs successifs.* Chaque champ procède du précédent par une amplification de plus en plus grandiose. Infiniment grand relativement à celui-ci, il est infiniment petit vis-à-vis de celui dans lequel il est englobé; sans limites suivant chacune des dimensions dont il est doué, il n'est plus qu'une chose évanouissante suivant une dernière qui lui fait défaut et qui existe en dehors de lui.

Que sont les choses que contiennent ces champs successifs?

Prenons, pour commencer, un des plans innombrables que notre pensée peut créer, on vient de voir de quelle façon : ce sera, par exemple, le plan horizontal sur lequel nous marchons, supposé prolongé indéfiniment dans tous les sens. Les choses qui sont dans ce plan ne sont que les *sections* faites par lui à travers des corps à trois dimensions occupant l'espace dans lequel il est plongé, ou bien les *faces de contact,* les *affleurements* de ces mêmes corps avec le plan. Nous y concevons bien encore des *figures* n'ayant pas cette origine, formées de lignes et de points; mais celles-là, comme leur nom l'indique et comme le plan lui-même, n'existent que dans notre pensée, par une abstraction de la troisième dimension à laquelle certains cerveaux ne s'habituent pas aisément.

Toutes ces choses, intersections, affleurements ou figures, nous pouvons les concevoir se déplaçant et se transformant dans le plan sans restrictions ni limites. Mais nous ne les concevons qu'avec les deux dimensions de celui-ci; dans le sens de la troisième dimension, elles n'ont comme lui qu'une épaisseur, ou nulle, ou infiniment petite, selon que le plan est conçu de l'une ou de l'autre des deux façons indiquées au début. Enfin, elles ne sont pas des êtres réels, qualité qui est l'apanage des corps à trois dimensions.

Ce que le plan est dans l'espace, nous avons admis que celui-ci l'est à son tour dans l'étendue à quatre dimensions : il y est, vis-à-vis de la quatrième, comme *une tranche* (?) infiniment mince et absolument plate, comme *un plan* (?) qui serait infini suivant trois dimensions au lieu de l'être suivant deux seulement. Les mêmes conditions doivent être faites aux êtres qu'il contient. Chez tous, la *quatrième* dimension est nulle ou infiniment petite. Ceux qui ne sont pas des *figures* évoquées par notre pensée seront les *intersections* ou les *affleurements* de l'espace avec des *corps à quatre dimen-*

sions existant hors de lui au milieu d'êtres analogues disséminés dans l'étendue à quatre dimensions. *Ces derniers jouiront seuls de l'existence réelle;* tous les autres : ceux qui ont trois dimensions, ou les *solides,* ceux qui en ont deux, ou les *surfaces,* ceux qui n'en ont qu'une, ou les *lignes,* enfin, ceux qui n'en ont pas, ou les *points,* seront, comme on dit en philosophie, des *êtres de raison,* c'est-à-dire des abstractions n'existant que dans notre pensée. Ils pourront se déplacer et se transformer dans l'espace sans restrictions ni limites (cette fois, c'est à dessein que nous répétons les mêmes expressions), mais ils n'auront, comme lui, qu'une épaisseur nulle ou infiniment petite dans le sens de la quatrième dimension. Ils y seront *à la superficie* (1) pour un œil qui regarderait l'espace comme nous pouvons regarder le plan qui est sous nos pieds.

En outre, l'espace ne sera plus une chose absolue, une entité unique et nécessaire, mais une simple unité au milieu d'une infinité d'autres, et il faudra dire : *notre espace,* pour spécifier celle de ces unités qui nous est dévolue. Qu'il les conçoive vides de toutes choses ou, comme le nôtre, peuplés d'univers, notre esprit ne peut *a priori* formuler aucune raison ni pour, ni contre l'existence de ces espaces congénères du nôtre, ni pour, ni contre celle de la vaste étendue qui embrasserait tout. L'observation n'en fournit pas davantage. Il semblerait donc que ce sujet doive être sans intérêt pour tout autre que le géomètre ou le métaphysicien; on verra cependant qu'il peut en être autrement, et que ces autres espaces, qui forment avec le nôtre une seule et même chose, qui ont avec lui la même continuité que les plans d'un espace ont entre eux, peuvent, en dépit des apparences, ne pas lui être complètement étrangers, et expliquent plusieurs des

(1) Cette image sera précisée à la fin de l'Avant-propos (p. XXVIII).

grosses difficultés auxquelles se heurtent les sciences physiques.

C'est dans ce sens, pour revenir à notre premier mot, que nous appartenons au monde des quatre dimensions, *s'il existe.* Et, s'il existe, il est soumis aux lois de la Géométrie que nous allons esquisser, comme le nôtre est soumis, avec les petits champs qu'il englobe, à celles de la *Géométrie ordinaire.*

Anticipant un peu sur le développement logique des idées, et au risque peut-être de déconcerter quelques lecteurs, nous voulons citer dès à présent un exemple des modifications et des généralisations que la multiplication des champs apporte dans celle-ci : ce sont des résultats qui reparaîtront à leur place naturelle dans le Chapitre III.

1° Par un point donné *sur un plan*, on ne peut lui mener, *dans notre espace,* qu'*une seule* perpendiculaire; mais considérez ce plan *dans l'étendue :* vous pourrez alors lui mener, par le même point, *une infinité* de perpendiculaires, dont le lieu est *un autre plan* qui n'a que ce point commun avec le premier, et qui *n'a qu'une droite commune avec notre espace*; nous ne voyons, nous, que celle-là et nous l'appelons LA *droite perpendiculaire au plan.*

2° Prenez encore une droite quelconque; pour nous, le lieu des perpendiculaires qu'on peut lui élever en un de ses points est *un plan* P; pour le géomètre à quatre dimensions, c'est *un espace* qui n'a pas d'autre point commun avec la droite donnée, mais qui contient, avec le plan P, une infinité d'autres plans perpendiculaires aussi à cette droite; son intersection avec notre espace est le plan P, que nous appelons LE *plan perpendiculaire à la droite,* ne voyant pas les autres.

3° Enfin, et ce dernier point nous sera déjà utile dans cet Avant-propos, l'on peut, en un point quelconque *d'un espace*, lui élever une perpendiculaire; elle est unique et déterminée; elle est parallèle à toutes les autres droites qui sont perpendiculaires au même espace; et elle est perpendiculaire *à toutes les droites et à tous les plans* qu'on peut tracer par son pied dans celui-ci. L'on peut donc mener, par un point donné, *quatre* droites perpendiculaires entre elles, puisqu'on en peut déjà placer trois dans l'espace; celles-ci étant données, la quatrième s'ensuit, toujours la même et toujours déterminée.

On voit combien la Géométrie à quatre dimensions élargit et synthétise le Chapitre de la perpendicularité entre droites et plans; et elle en ajoute un nouveau sur la perpendicularité entre droites, plans et espaces.

II. — La non-perception.

Le lecteur vient d'entrevoir des *idées* et des *formes* qui lui auront sans doute paru singulières. Les premières seront précisées au moyen d'équations, qui ne seront que la continuation logique et naturelle de la Géométrie connue, et qui remplaceront, avec leur perfection coutumière, la terminologie que le langage ordinaire ne nous fournit pas suffisamment. Les mêmes équations définiront les secondes, qui, sous le nom générique d'*hypercorps*, et les noms spécifiques d'*hypersurfaces*, *polyédroïdes*, etc., sont déjà riches d'une littérature abondante.

On verra que ces configurations peuvent être représentées par des *projections sur notre espace*, au moyen de perpendiculaires abaissées des divers points du corps sur celui-ci, tout comme les corps de notre espace peuvent être, au moyen de

perpendiculaires, représentés par des *projections sur un plan.* Des modèles en relief de pareilles projections, qui sont des *surfaces* ou des *polyèdres*, ont été construits en Allemagne et en Amérique, constructions coûteuses et encombrantes, auxquelles nous suppléerons par celles de la Géométrie descriptive (Chapitre VIII). Mais si, avec une projection sur un plan, encore mieux avec deux projections sur deux plans, on n'a guère de peine à constituer et à voir par la pensée le solide de l'espace, il est de toute impossibilité de remonter de la projection d'un corps à quatre dimensions à ce corps lui-même, *ni d'en concevoir les formes de quelque autre manière que ce soit. Notre esprit n'est pas capable de voir ces êtres avec des formes et dans des positions déterminées.* Aucune des images matérielles qui nous entourent ne nous fournit de point d'appui ni d'élément de comparaison.

S'il faut en croire l'auteur de *A new era of thought* (1), l'impossibilité n'existerait pas pour tout le monde; voici son texte lui-même, car il nous a paru trop difficile à traduire :

« ...After many years of work, during which the conception » of four-dimensional bodies lay absolutely dark, at length, » by a certain change of the plan, the whole subject of four- » dimensional existence became perfectly clear and easy to » impart.

» There is really no more difficulty in conceiving four- » dimensional shapes, when we go about in the right way, » than in conceiving the idea of solid shapes, nor is there » any mystery at all about it.

» When the faculty is acquired, or rather when it is brougth » into consciousness, — for it exists in every one in imper- » fect form — a new horizon opens. The mind acquires a » development of power, and in this use of ampler space as

(1) CH. HOWARD HINTON. Londres, 1883.

» a mode of thought, a path is opened by using that very
» truth which, when first stated by Kant, seemed to close
» the mind within such fast limits. Our perception is subject
» to the condition of being in space; but space is not limited
» as we at first think. »

Quelques rares joueurs d'échecs ont la faculté de *mener plusieurs parties simultanément et sans voir*. N'ayant pas même une feuille de papier pour prendre des notes, le joueur qui accomplit ce tour de force est placé de manière à ne pas voir ses adversaires, placés eux-mêmes devant autant d'échiquiers; un intermédiaire exécute sur ces échiquiers les mouvements ordonnés par lui, et lui fait connaître verbalement les réponses. C'est ce qu'on appelle le *Blindfold-play*. Philidor émerveilla ses contemporains en donnant des séances où il jouait ainsi *trois* parties contre les trois joueurs les plus renommés après lui, et quelques-uns de ces célèbres matchs nous ont été conservés. De nos jours, on a vu successivement, au lieu de trois parties, huit, douze, seize... et, tout récemment, *vingt-deux!*

Quand, après de longues heures, toutes les parties sont finies, en majorité gagnées par lui, le héros (on peut bien lui donner ce nom) est en mesure d'en répéter tous les coups, et ils se chiffrent par centaines! (1) Comment son cerveau opère-t-il? A cette question, quelques-uns répondent que c'est une affaire de mémoire et de méthode, presque tous qu'ils *regardent* un échiquier avec ses pièces, dessiné dans leur pensée *comme dans un miroir intérieur*, suivant

(1) *Voyez* BINET, *Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs*, Paris, 1894. — Le 14 décembre 1902, à Moscou, l'Américain Pillsbury a soutenu, dans ces conditions, *vingt-deux* parties; il en a gagné *dix-sept*, perdu *une*, annulé *quatre;* il a joué au total 675 coups en dix heures, sans voir!!! (Voy. *La Stratégie* de janvier 1903, aussi celle d'août 1902, etc.)

l'expression de Taine; ils vous en feront un croquis, si vous le désirez. Une pareille faculté nous étonne beaucoup, mais nous sommes bien forcés de l'admettre, parce que nous en possédons des exemples relativement nombreux; celle dont il est question dans les lignes ci-dessus nous paraît bien plus étonnante, et nous aimerions à en voir d'autres exemples que celui de leur auteur.

M. Poincaré a dit, ironiquement sans doute : « Quelqu'un » qui y consacrerait son existence, pourrait *peut-être* arriver » à se représenter la quatrième dimension (1) ».

Pour nous, nous avons déjà dit notre pensée. Elle est que le lecteur ne doit pas caresser l'espoir d'objectiver, comme le blindfold-player le fait avec les pièces de son échiquier mental, les êtres à quatre dimensions qui font l'objet de cette étude, ni les mouvements que nous leur imprimerons; qu'il épuiserait son cerveau dans de stériles efforts en cherchant à percer la tranche infinitésimale qui s'étend entre ces êtres et lui. S'il y a réellement quatre dimensions, notre esprit est confiné dans les trois premières. C'est l'axiome, *également d'ordre empirique,* qui remplacerait dans ce cas celui *des trois dimensions,* formulé au début de cet Avant-propos, et nous lui conserverons le même nom.

Une pareille limitation n'est pas spéciale à la branche qui nous occupe. Le mathématicien n'est-il pas dans une situation analogue vis-à-vis de choses devenues tout à fait classiques et dont il tire un excellent parti : — les *nombres infiniment grands* et les *figures infiniment éloignées*, dont nous ferons quelque usage, — les *racines imaginaires des équations* et les *figures imaginaires*, avec lesquelles nous n'aurons presque rien à

(1) *Revue générale des Sciences*, 1891, p. 774. — Cette boutade est expliquée et commentée par M. Poincaré dans une publication ultérieure : *L'espace et la Géométrie* (*Revue de Métaphysique et de Morale*, p. 631-646, 1895).

faire? Toutes ces choses, il les admet au sens abstrait, sans être obligé pour cela d'en admettre la réalité concrète, ni même de la discuter; il peut les créer à sa guise à la seule condition de ne pas se mettre en contradiction avec lui-même. Dans ce domaine, il est l'égal de Dieu : *Quidquid contradictionem non implicat, Deus potest* (Saint Thomas).

Sous ces réserves, nous parlerons habituellement de l'étendue et des êtres à quatre dimensions comme si ces choses existaient réellement. Le lecteur voudra bien, de son côté, excuser les expressions, les images et les constructions, impliquant cette existence réelle, dont nous ferons usage pour faciliter notre exposition.

III. — Les applications mathématiques.

La non-perception des corps qui sont à l'extérieur de notre espace n'empêche nullement d'établir leur géométrie, c'est-à-dire les relations descriptives et métriques qu'ils ont entre eux et avec ceux que nous connaissons, et même avec ceux qui, *de l'autre côté*, peuplent les étendues supérieures. Le lecteur qui nous suivra dans ces curieuses régions de la pensée, dans ce pays qu'on a appelé *la féerie des Mathématiques*, s'habituera vite aux étrangetés qu'il rencontrera, parce que ces étrangetés sont d'accord avec la plus rigoureuse logique. Nous ne chercherons d'ailleurs pas à les atténuer, pas plus que nous n'avons cherché à lui dissimuler la seule, mais réelle, difficulté de l'étude à laquelle nous le convions : celle de la non-perception.

Et il se rendra compte de l'utilité d'une pareille étude. Qu'on ne croie pas, en effet, que la Géométrie des dimensions multiples n'a qu'un intérêt intrinsèque, et n'est qu'un beau

terrain d'exercices de gymnastique mathématique, clos de toutes parts. Elle a exercé une influence sur la Science tout entière, où elle a désormais sa place marquée. Elle a élargi les idées sur la Géométrie ordinaire, qui n'en est qu'un cas particulier; ouvert de nouveaux aperçus sur la dépendance entre les théories qui concernent respectivement le plan et l'espace; mis entre les mains du mathématicien des méthodes d'investigation insoupçonnées jusqu'alors; fourni de nombreux théorèmes au moyen du facile passage que certains artifices, appelés *projection*, *section*, *particularisation*, établissent entre un champ et ses subordonnés; enfin, rendu plus abordables, en fournissant des énoncés simples et expressifs à des choses compliquées et abstraites, certaines parties fort difficiles de la *Théorie des nombres*, de celle des *Fonctions algébriques*, de celle des *Substitutions*, etc.

Les Écoles d'aujourd'hui ont une tendance marquée, en Allemagne et en Italie plus encore qu'en France, à donner aux questions d'Algèbre la forme géométrique, à illustrer en quelque sorte, en les doublant d'une conception figurative, non seulement une relation entre des quantités pures, mais encore tout le corps de doctrine formé par un ensemble de pareilles relations. Les *Leçons* de Klein *sur l'Icosaèdre, faisant entrer* les *polyèdres réguliers* dans la *Théorie des Substitutions* et dans la question de la *Résolution des équations*, sont le modèle du genre (1). On peut citer encore, du même auteur et dans le même ordre d'idées, les corrélations établies entre certaines configurations géométriques et la *Théorie des nombres* (2), qui est regardée comme ce qu'il y a de

(1) KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, in-8°, Leipzig, 1884.

(2) *Conférences sur les mathématiques faites au Congrès de Chicago*, recueillies par ZIWET, traduites par LAUGEL, grand in-8°. Paris, 1898 (8e conférence).

plus difficile, de laquelle on a dit que c'est la seule branche *pure*, non souillée encore par le contact avec les applications.

La Géométrie des dimensions multiples a le mérite de venir agrandir le champ dans lequel peut s'exercer cette tendance à *combiner* intimement ensemble la grandeur exprimée par des lettres et celle qui a la ligne pour élément, tendance qui dénote et satisfait un véritable sentiment artistique, en même temps qu'elle donne du sujet une notion plus étendue. Quand même on lui retirerait toute existence individuelle pour la réduire à ce dernier rôle et ne voir en elle, suivant l'expression de M. Badoureau (1), qu'une *métaphore de l'Algèbre générale,* le rôle serait encore d'une extrême utilité.

Les lignes suivantes, par lesquelles débute le livre de M. Poincaré sur l'*Analysis situs* (2), achèveront de la caractériser bien mieux que ce que nous pourrions faire.

« La Géométrie à *n* dimensions a un objet réel, personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

» La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique *d'un groupe*. Rien

(1) *L'espace géométrique et les espaces algébriques* (*Revue scientifique* du 8 novembre 1890). On peut citer encore, bien qu'il n'y ait plus ici de combinaison proprement dite, mais de simples rapprochements, la *Théorie de la Toupie* de Klein, où cet instrument sert de support tour à tour à la Dynamique, aux fonctions elliptiques, aux quaternions etc. : *Théorie des Kreisels*, Tome I, 1897; Tome II, 1898; Tome III, à paraître.

(2) *Journal de l'École Polytechnique,* 1895.

n'empêche, par conséquent, d'aborder *d'autres groupes* (¹).

» Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir? C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles. »

Pour finir, tout se passe, *analytiquement, arithmétiquement, graphiquement*, comme si la quatrième dimension existait au même titre que les autres. Que peut-on lui demander de plus?

IV. — Les applications physiques.

Si le lecteur bienveillant nous accompagne jusqu'au bout, il verra les idées qu'il a recueillies sortir du domaine purement géométrique pour pénétrer dans celui des sciences physiques. Celui-ci se compose, il est vrai, d'êtres concrets, tandis que nous n'aurons manié jusque-là que des êtres de raison : le point et la droite, le plan avec tous les objets à une ou deux dimensions qu'il peut contenir, l'espace avec tous les siens à une, deux ou trois dimensions, ne sont pas autre chose, puisque nous avons reporté à ceux qui en ont quatre le privilège de l'existence réelle. Pour avoir le droit de les concevoir comme des êtres concrets, il n'y aura qu'à les *compléter à quatre dimensions en leur donnant celles qui leur manquent,* sous la condition que ces dernières aient une

(¹) Le mot *Groupe* est employé ici dans le sens, tout à fait défini, introduit dans la science par Galois; *voir*, par exemple, le *Traité des Substitutions* de Jordan.

valeur négligeable comparativement à celles déjà existantes. Des portions d'espace, de plan ou de droite, et le point lui-même, seront ainsi des *portions d'étendue* ayant respectivement une, deux, trois ou quatre dimensions *très petites*. Nous ne disons plus *infiniment petites*, comme en Géométrie : nous n'aurions encore que des êtres abstraits. Il faut que les dimensions ajoutées soient finies, très petites si vous voulez, aussi petites qu'on pourra le désirer, plus petites que toute valeur finie qui pourra être indiquée, *mais finies*.

Revêtant ainsi la forme concrète, les principes de la Géométrie à quatre dimensions donneront une explication, incontrôlable à la vérité, mais éminemment simple et hautement rationnelle, de nombreux phénomènes dont ces sciences n'entrevoient même pas encore la cause directe.

Nous voulons parler de ceux pour lesquels l'ancienne Physique avait créé les vagues entités appelées *Agents impondérables*, non moins transcendantes ni moins intangibles que la quatrième dimension, et que la nouvelle Physique, s'éloignant peut-être du but au lieu de s'en rapprocher, veut expliquer rien qu'en les considérant comme des mouvements d'*atomes matériels*. Le problème qu'elle s'est posé devient bien plus facile à résoudre si, aux trois composantes de mouvements et de forces qu'elle peut appliquer déjà à ces atomes, il s'en ajoute une quatrième, dont nous avons fait entrevoir l'existence (p. XIII), suivant une direction perpendiculaire *à chacune de celles-là ;* composante ne se distinguant en rien des premières et pouvant se combiner avec une d'elles pour former un système birectangulaire, avec deux pour former un système trirectangulaire, avec les trois pour former un système quadrirectangulaire ; apportant ainsi au physicien des facilités inespérées pour engendrer les vibrations multiples qu'il veut voir sous les mots *chaleur*, *lumière*, *électricité*, etc.

Quoi de plus simple que cette extension de la Mécanique, bien définie dans son principe, facile dans ses applications, riche dans ses conséquences? Avec cette unique composante, sœur de celles qui nous sont familières à tous, ne satisfait-elle pas à la première condition de toute explication scientifique : *Réduire au minimum le nombre des choses inconnaissables?* Que l'on compare à une pareille solution cette multitude touffue d'hypothèses arbitraires, artificielles, compliquées, contradictoires, improbables ou impossibles, toutes d'une admirable ingéniosité, mais ayant toutes, à l'un ou à l'autre bout, quelque chose que nous ne pouvons pas concevoir : la *matière sans forme* d'Aristote, l'*atome* « *rigide dans sa compacte unité* » de Lucrèce, l'*homéomérie* d'Anaxagore, la *matière subtile* de Descartes et sa *matière cannelée,* les *monades* de Leibnitz, les *centres de force* de Boscowitch, l'*éther élastique et solide* de Fresnel, l'*éther labile* de Thomson, l'*atome-tourbillon* du même, l'*atome palpitant* (*sphere pulsating*) de Hicks, les *électrons* de Larmor, etc.

On remarquera d'ailleurs que l'axiome des trois dimensions (p. VI), n'est nullement mis en cause ici, car, de nature purement empirique, il vise seulement les choses qui tombent sous nos sens. Or les choses hypothétiques que nous appelons *atomes et vibrations atomiques, molécules et mouvements moléculaires*, ne sont pas dans ce cas; la réalité qui peut se cacher sous ces mots, quelle qu'elle soit, échappe absolument à notre observation; nous ne saurions donc l'assimiler à aucun degré aux particules matérielles et aux déplacements, si menus soient-ils, que nous pouvons percevoir et qui ont mis en nous cet axiome.

D'autre part, le fait que la quatrième composante n'apparaît que dans le champ ultramicroscopique suggère l'idée que les corps de notre univers auraient tous une certaine

épaisseur dans le sens de la quatrième dimension, mais que cette épaisseur serait extrêmement petite (1).

V. — Programme de l'Ouvrage.

A la tête des savants qui ont exploré et fécondé la Géométrie des dimensions multiples, il convient de citer :

En France, Suisse et Belgique : Camille Jordan, un des premiers en date et en importance, Halphen, Poincaré, Goursat, René de Saussure, Mansion ;

En Italie, où cette branche est fort en honneur et où brille de nos jours une riche pléiade de mathématiciens : Aschieri, Bertini, Cassini, Castelnuovo, Cesàro, Fano, Loria, d'Ovidio, del Pezzo, Pieri, Segre, Veronèse ;

En Espagne : Galdeano ;

En Allemagne, Norvège, Autriche et Hollande : Biermann, G. Cantor, S. Kantor, Kelling, Hoppe, Klein, Sophus Lie, Lipschitz, Puchta, Rudel, Schlegel, Schoute, Schubert, Simony, Van Oss ;

En Angleterre et aux États-Unis : Ball, Cayley, Cole, Hall, Heyl, Hinton, Lasker, Sylvester, Stringham, Spottiswoode, M^me^ Boole Stott.

Les publications sur la matière forment, dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1900, une liste de 439 articles, qui pourrait déjà être augmentée quelque peu. Ces travaux sont dispersés dans les recueils les plus variés, écrits dans toutes les langues, composés aux points de vue les plus disparates, et la plupart ne s'adressent qu'à des lecteurs rompus au maniement de l'instrument mathématique. Nous nous sommes proposé d'en réunir les principaux résultats en un

(1) *Voir* Chapitre IX.

ensemble méthodique, de lecture facile, de facture analogue à celle de nos Traités classiques sur la Géométrie.

La théorie générale des champs fait l'objet de la *Géométrie à n dimensions*. Mais les questions se compliquent singulièrement à mesure qu'on avance d'un champ à l'autre. Nous nous confinerons dans celui du quatrième degré, que nous avons appelé l'*Étendue*, qu'on appelle aussi l'*Hyperespace;* nous ne le franchirons qu'une fois et qu'un instant : dans le dernier Chapitre. Ce n'est pas qu'il soit indifférent de l'étudier en le considérant comme un terme d'une série illimitée, ou comme clôturant le théâtre des spéculations géométriques, ainsi que le faisait jusqu'ici la Géométrie à trois dimensions; c'est que le second parti, plus modeste, convient mieux à notre objet.

Deux méthodes principales peuvent être et ont été employées pour cette étude : celle de Descartes et celle de Grassmann. La seconde, plus simple dans ses calculs, plus puissante comme instrument, mieux adaptée à l'être géométrique, doit être préférée en thèse générale (¹). La première, plus élémentaire et plus connue, suffira pour notre cas particulier, et nous l'emploierons avec ses procédés classiques.

La route pourrait être longue, mais nous l'abrégerons le plus possible. Des très nombreuses questions qui surgiront devant nous, quelques-unes seront peu intéressantes pour notre objet, qui est de *tracer une fidèle, mais rapide esquisse :* nous les mettrons délibérément de côté. D'autres

(¹) On en trouvera une excellente exposition par M. Carvallo dans *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1892, p. 8-37, et, si l'on veut voir l'application à l'hyperespace, on peut lire :

SCHLEGEL, *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions,* dans *Bulletin de la Soc. math. de France,* 1882.

JOLY, *The associative Algebra applicable to Hyperespace,* dans *Proceedings of the R. Irish Academie,* 1878.

auront du charme et de l'attrait : nous ne craindrons pas trop de nous attarder dans leur voisinage. Il y en aura de faciles : nous prierons le lecteur d'en chercher lui-même les démonstrations ou les solutions. Plusieurs ne pourront être approfondies qu'avec les puissantes ressources dont disposent seuls les mathématiciens de premier ordre : pour celles-là, nous nous contenterons respectueusement d'une exploration superficielle. En général, nous ne nous attacherons pas aux difficultés de pure analyse, mais seulement à celles qui sont inhérentes à la quatrième dimension elle-même.

Nous ne nous occuperons point des espaces non euclidiens, c'est-à-dire des Géométries, quel que soit le nombre de leurs dimensions, où l'on peut, par un point donné dans un plan, mener plus d'une parallèle à une droite donnée de ce plan (Lobatchewsky), et de celles où l'on n'en peut mener aucune (Riemann) (1).

Nous laisserons également de côté la Mécanique.

Les notions professées dans les premières leçons de *Géométrie analytique*, voilà dès lors tout le bagage nécessaire à la personne qui nous suivra, et elle n'aura pas, nous osons l'espérer, à déployer cette attention soutenue et laborieuse que demandent souvent les Ouvrages de Mathématiques. En vue de ce résultat, nous avons lutté avec l'aridité du sujet pour tâcher de donner à la Géométrie, sans rien lui ôter de la précision dont elle est fière, un langage un peu plus imagé que celui dont elle se sert habituellement.

Beaucoup de points seront d'ailleurs facilités par des représentations graphiques, et ceci n'est peut-être pas un des moindres étonnements réservés au lecteur. L'être géomé-

---

(1) On peut voir sur ces Géométries : *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*, par DE TILLY, major d'artillerie, Bruxelles, 1879; *Fondamenti di Geometria*, par VERONESE, Padoue; 1891.

trique à quatre dimensions, qui se dérobe si bien aux efforts de la pensée, semblerait devoir échapper de même à tout autre mode de représentation. Il est au contraire saisi, aussi entièrement qu'on peut le désirer, par une *Géométrie descriptive* à base quadridimensionnelle, mais à constructions planes comme celle de Monge, avec toutefois plus de simplicité et d'élégance. C'est au point que certaines questions traitées par l'épure gagneraient, comme nous l'avons vu pour d'autres d'ordre abstrait, à être élargies, puis transportées de l'espace dans l'étendue. Cette différence en faveur d'une des deux Géométries descriptives a sans doute sa raison dans la symétrie que le nombre *quatre* porte avec lui, et qu'on remarquera surtout au sujet des *rotations* (§ 15), si singulières dans le monde où nous allons entrer.

Nous citerons nos sources. Nous indiquerons, autant que possible, les endroits où l'on pourra trouver les développements devant lesquels nous aurons reculé, nous contentant alors d'ouvrir une fenêtre sur le vaste horizon, et de montrer les voies de pénétration (¹).

Peut-être trouvera-t-on que nous citons plus d'auteurs étrangers que d'auteurs français. C'est que, précisément, notre sujet a été beaucoup plus cultivé par les premiers; il est du reste moins facile au lecteur de les étudier par lui-même, ne serait-ce qu'à raison de la différence de langue.

Tout en prenant un peu plus d'indépendance que si nous écrivions un Traité rigoureusement didactique, nous avons

(¹) La plupart des travaux auxquels nous renvoyons sont contenus dans des recueils académiques, des publications périodiques, etc., dont le titre est souvent assez long. Dans le courant de l'Ouvrage, où la plupart se trouvent répétés plusieurs fois, nous mentionnerons ces titres sous une forme abrégée, mais nous les donneron *in extenso* dans une liste récapitulative placée à la fin (p. 209).

voulu néanmoins présenter un ensemble méthodique et logique, où il n'y ait ni trop de lacunes, ni trop de superfluités, dont la lecture soit à la fois facile et profitable. *Facile*, on vient de voir dans quelle mesure; *profitable*, parce qu'une fois mise de côté l'utopie — ce mot ne fut peut-être jamais mieux à sa place — il doit rester de notre petit livre un certain nombre de faits généraux, de particularisations, d'idées synthétiques, de méthodes de raisonnement... intéressant les Géométries classiques. Il y aura probablement aussi quelques erreurs, car le passage des trois aux quatre dimensions n'est pas toujours aussi facile et intuitif que ce qu'on pourrait croire (1): le lecteur voudra bien les mettre tout simplement de côté.

Quoi qu'il en soit, voici quelles seront les principales étapes de notre voyage dans l'hyperespace :

I. — Définitions.
II. — Intersections et parallélisme.
III. — Perpendicularité.
IV. — Quelques théorèmes.
V. — Système de coordonnées.
VI. — Les angles.
VII. — Les êtres de la Géométrie à quatre dimensions.
VIII. — Les polyédroïdes réguliers.
IX. — Les applications.
X. — Hors de l'étendue.

Avant d'entrer en matière, nous insistons pour qu'on n'oublie pas le sens précis que nous donnons à chacun des mots, ESPACE et ÉTENDUE, la distinction essentielle et rigoureuse que nous faisons entre eux et que nous n'oublierons pas de

(1) On peut citer comme exemples d'un pareil passage : 1° la question du *Système de coordonnées*, qui en est un des cas les plus simples (§ 20); 2° celle des *Polyèdres* (§ 36), un peu plus compliquée.

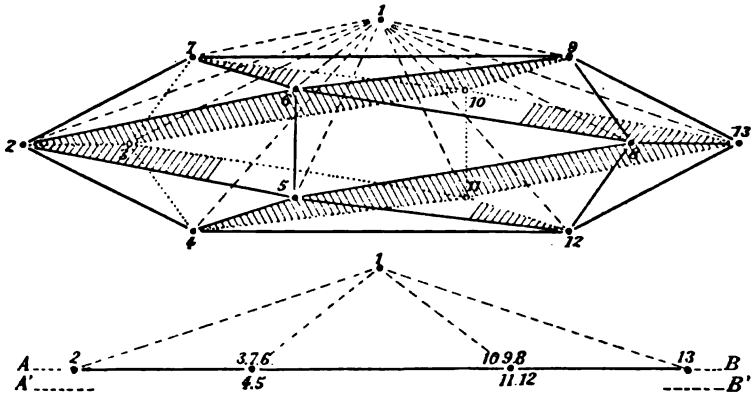
notre côté : Celui-là est à celle-ci ce que le plan est à l'espace dans la Géométrie à trois dimensions, ce que la droite est au plan dans celle à deux, ce que le contenu est au contenant dans le langage ordinaire; la droite, le plan et l'espace ne sont que des portions élémentaires, respectivement, du plan, de l'espace et de l'étendue.

Nous voudrions surtout que le lecteur se pénètre bien de ce dernier point, c'est-à-dire de la *conception de l'espace comme élément infinitésimal de l'étendue.* Voici une dernière image qui contribuera peut-être à parfaire ce résultat. Comme la droite est divisée en deux parties infinies égales par un quelconque de ses points; comme le plan l'est de même par une quelconque de ses droites et l'espace par un quelconque de ses plans; ainsi tout espace partage l'étendue en deux régions infinies, qui sont identiques entre elles, qui reposent sur lui de chaque côté, et entre lesquelles il forme une couche *infiniment mince.*

Ce fait n'est nullement une fiction analytique : nos épures du Chapitre VIII lui donneront un corps et le feront toucher du doigt matériellement. Si l'on jette les yeux sur ces épures, on constatera nombre de fois qu'en effet tous les points, droites et plans situés dans un même espace se projettent *sur une seule et même droite* quand cet espace est, relativement au plan de projection, dans une certaine position qui sera définie (Chapitres III et IV) par le mot *perpendiculaire.* Que l'on prenne, par exemple, les deux figures suivantes, fragments de deux épures du § 46. Ce sont les projections d'un *icosaèdre régulier* dont l'espace E se trouve dans cette position pour la seconde et en est voisin pour la première. Déjà fort diminuées dans celle-ci, les dimensions transversales de l'icosaèdre s'évanouissent dans la seconde : la projection n'y est plus qu'une droite 2-13, laquelle recevrait aussi tous les autres

points de l'espace E (¹). Un œil placé au point 1, hors de l'espace E, verrait au même niveau, comme nous le disions plus haut, toutes les parties du solide, tant intérieures qu'exté-

Fig. 1.



rieures; aucune ne lui serait cachée par les autres, parce qu'*aucune des directions joignant deux points quelconques du corps ne sort de l'espace* E et, par conséquent, ne peut coïncider avec celles 1-2, 1-3, 1-4, etc., du regard supposé. Il y aurait, entre la manière dont ce regard et le nôtre verraient l'icosaèdre, la même différence qu'entre la manière dont un *polygone* serait vu par un œil confiné dans son plan et par le nôtre.

On doit maintenant bien comprendre le sens de cette expression que nous employons faute d'autre : *une épaisseur*

(¹) On peut remarquer dès à présent, à l'inspection de ces figures, les différences que présentent les *formes* des projections dans la *Géométrie descriptive à quatre dimensions* et dans *celle à trois :* dans celle-ci, la figure supérieure ne peut pas être la projection d'un icosaèdre régulier, et la figure inférieure ne saurait être celle d'aucun polyèdre. — Quatre des six *pentagones* de l'icosaèdre (comp. la fig. 19, p. 110) ont été couverts de hachures dans la première figure tout simplement pour les faire remarquer et faciliter ainsi l'intelligence de cette figure. — On verra, § 25, pourquoi les deux pentagones transversaux 3.4.5.6.7 et 8.9.10.11.12 se projettent chacun en un point unique dans la seconde figure.

dans le sens de la quatrième dimension; c'est la portion d'étendue comprise entre deux espaces parallèles AB, A'B'. Elle correspond à la portion du plan comprise entre les deux droites parallèles suivant lesquelles ces deux espaces se projettent sur un plan qui leur est perpendiculaire. L'une et l'autre grandeur a pour mesure la plus courte distance des deux droites.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A QUATRE DIMENSIONS.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS.

---

§ 1. — Les champs.

Nous avons vu que, sur le terrain purement géométrique, notre esprit éprouve quelque difficulté à juxtaposer des espaces pour former cet ensemble supérieur que nous avons appelé l'*Étendue*, comme il juxtapose des points pour faire une droite, des droites pour faire un plan, des plans pour faire un espace. Sur le terrain analytique, le quatrième pas se franchit aussi facilement et aussi naturellement que les premiers.

Comme la Géométrie analytique à deux dimensions et celle à trois, la Géométrie à quatre dimensions prend *le point* pour l'être analytique primordial. Et, tandis que la première le définit au moyen de *deux* coordonnées

$$x_1, \quad x_2$$

rapportées à un système de *deux droites se coupant;* tandis que la seconde le définit au moyen de *trois* coordonnées

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

rapportées à un système de *trois plans se coupant;* elle emploie

quatre coordonnées

$$(a) \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4.$$

On devine de suite, en poursuivant l'analogie, qu'elle va les rapporter à un système de *quatre espaces se coupant*. Mais, précisément à raison de la difficulté que présente la conception de la multiplicité des espaces, nous voulons laisser provisoirement de côté la question du système de référence. Nous n'y viendrons qu'au Chapitre V, après avoir établi toutes les notions fondamentales, et ce sont celles-ci qui nous le donneront elles-mêmes.

De plus, nous substituons à nos quatre coordonnées *quatre équations linéaires simultanées*

$$(1) \qquad \begin{cases} A = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \\ B = b_0 + b_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ C = c_0 + c_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ D = d_0 + d_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

les reliant entre elles et assujetties à la condition d'être distinctes les uns des autres et non incompatibles entre elles (c'est-à-dire d'avoir un déterminant différent de zéro). Sous cette condition, le système (1) est équivalent au système (a), puisque sa résolution donnerait quatre valeurs déterminées x_1, x_2, x_3, x_4; nous l'écrirons habituellement ainsi, sur une seule ligne :

$$(1) \qquad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0.$$

On appelle donc *point* l'être géométrique, *quel qu'il soit* et sous quelque forme qu'on veuille se le représenter, qui correspond à quatre valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 appelées *coordonnées* et satisfaisant aux équations (1).

On appelle en outre *droite* le lieu des points dont les coordonnées satisfont à trois de ces équations :

$$(2) \qquad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

plan, le lieu des points dont les coordonnées satisfont à deux :

$$(3) \qquad A = 0, \quad B = 0;$$

espace, le lieu des points dont les coordonnées satisfont à une :

$$(4) \qquad A = 0;$$

enfin *étendue*, le lieu des points que l'on peut obtenir en donnant aux quatre coordonnées des valeurs quelconques, sans aucune condition. L'étendue se présente ordinairement sous la forme

$$A + \lambda = 0, \tag{5}$$

λ désignant une indéterminée.

Les systèmes (1), (2), (3), (4) s'appellent respectivement *les équations du point, de la droite, du plan et de l'espace*. Nous comprendrons les trois dernières sortes d'êtres géométriques sous le nom générique de *champ*. Il y a une multitude infinie de champs de chaque sorte, et ils sont tous plongés dans l'étendue, qui est le contenant de toutes les configurations imaginables.

La *droite*, champ du premier degré, contient un ∞ de points, les points étant supposés, dans cette image, séparés les uns des autres par un intervalle fini quelconque. Le *plan*, champ du second degré, peut être considéré comme engendré par une droite se déplaçant parallèlement à elle-même pendant qu'un de ses points suit une autre droite qui est fixe; il contient par suite un ∞^2 de points. L'*espace*, champ du troisième degré, peut être considéré comme engendré par un plan se déplaçant parallèlement à lui-même pendant qu'un de ses points suit une droite fixe qui ne s'y trouvait pas contenue au départ; il contient un ∞^3 de points. Enfin l'*étendue* peut être considérée comme engendrée par un espace se déplaçant parallèlement à lui-même pendant qu'un de ses points suit une droite fixe qui ne s'y trouvait pas contenue au départ; elle contient un ∞^4 de points.

Ces propositions, qu'on donne quelquefois comme des définitions, seront démontrées plus loin (§ 4), c'est-à-dire ramenées aux définitions que nous avons données et qu'expriment les équations (2), (3), (4) et (5). Nous les en rapprochons afin que le lecteur puisse, de suite, rapporter les bases de la nouvelle géométrie aux deux formes qui lui sont le plus familières. Elles montrent ce qu'il faut entendre quand on dit que la droite a une dimension, que le plan en a deux, l'espace trois et l'étendue quatre : ces nombres sont les exposants qui affectent le symbole ∞ dans leur énoncé, et correspondent, pour les trois premiers, aux idées de longueur, de surface et de volume qu'ils évoquent.

Considéré sur une droite, le point a *un* degré de liberté; il en a *deux* dans un plan, *trois* dans un espace et *quatre* dans l'étendue.

Souvent on considère :

Le point, comme un élément de droite, et l'on dit qu'il a une longueur infiniment petite dx_1;

La droite, comme un élément de plan et l'on dit qu'elle a une seconde dimension infiniment petite dx_2;

Le plan, comme un élément d'espace, et l'on dit qu'il a une troisième dimension infiniment petite dx_3;

L'espace, comme un élément de l'étendue, et l'on dit qu'il a une quatrième dimension infiniment petite dx_4.

En un mot, au lieu de dire de la droite, du plan et de l'espace *qu'il leur manque* trois, deux ou une dimension, on dit alors qu'ils ont ces trois, deux, ou une dimension, *infiniment petites*.

§ 2. — Espaces générateurs.

Si l'on prend les équations (3) d'un plan et qu'on les combine linéairement, on obtient une infinité d'équations de la forme

$$A + \beta B = 0, \tag{6}$$

β désignant une indéterminée. Les espaces représentés par ces équations ont le plan pour intersection commune, et nous les appellerons les *espaces générateurs* de ce plan. Leur ensemble s'appelle un *faisceau d'espaces*.

Si l'on prend les équations (3) d'une droite D, et qu'on les combine linéairement, on obtient une infinité d'autres équations de la forme

$$A + \beta B + \gamma C = 0; \tag{7}$$

les espaces représentés par ces équations ont la droite D commune, et nous les appellerons ses *espaces générateurs*. Ils se coupent deux à deux suivant une infinité de plans contenant aussi la droite D, et qu'on pourra appeler ses *plans générateurs*.

D'autre part : 1° Si l'on joint à l'équation $A = 0$ d'un espace A, une autre équation $B = 0$, ou deux autres équations $B = 0$, $C = 0$, on aura, dans le premier cas un plan, dans le second une droite, qui seront contenus en entier dans l'espace A; nous dirons

que les plans et les droites ainsi obtenus sont *les plans et les droites de* A; 2° Si l'on joint aux équations $A = o$, $B = o$, d'un plan P, une troisième équation $C = o$, on obtient l'équation d'une droite contenue en entier dans le plan P, et nous dirons de toutes les droites ainsi obtenues que ce sont *les droites du plan* P.

L'observation qui suit est de nature à abréger souvent les raisonnements et les calculs.

En plus des *quatre coordonnées courantes,* toute question comporte des grandeurs qui sont déterminées invariablement et qu'on appelle *les données,* ou les *constantes;* d'autres qui ne le sont pas et qu'on appelle *les arbitraires, les indéterminées,* ou *les inconnues.* La position de la question conduit à établir entre ces trois catégories de grandeurs des *équations de condition,* et c'est en éliminant de celles-ci les grandeurs de la troisième catégorie qu'on obtient le résultat cherché. Ce résultat n'est autre qu'un des systèmes (1) à (5), et, s'il n'a pas besoin d'être précisé numériquement, on pourra se dispenser de faire les calculs de l'élimination en appliquant le théorème suivant dont une première application se rencontrera au § 7.

Lorsque les quatre coordonnées courantes x_1, x_2, x_3, x_4 sont engagées dans un système de m équations linéaires en compagnie de valeurs arbitraires au nombre de

$m - 4$,	le système représente.....	un point,
$m - 3$,	» »	une droite,
$m - 2$,	» »	un plan,
$m - 1$,	» »	un espace,
m, ou davantage,	»	l'étendue;

car l'élimination des arbitraires donnerait, dans les cinq cas, respectivement, 4, 3, 2, 1 ou o équations entre les coordonnées.

§ 3. — Conditions déterminatives.

Un espace est déterminé quand on donne quatre points qu'il doit contenir. — L'équation (4) contient, en effet, quatre paramètres, qui sont les rapports de quatre de ses coefficients au cin-

quième, et, si l'on y substitue successivement les coordonnées des quatre points donnés, on obtient quatre équations de condition qui déterminent ces quatre paramètres.

Il n'y a pas de contradiction entre cette conclusion et le fait qu'en vertu des équations (1) quatre points impliquent *seize* constantes. Quand il est dans un espace, chaque point a encore trois *paramètres de détermination*; des seize constantes, il en reste donc seulement $16 - 12 = 4$ essentielles.

Un plan est déterminé par trois points. — Considérons en effet un espace quelconque assujetti à passer par ces trois points. Cette condition donne, entre les quatre paramètres de l'équation générale (4), trois relations linéaires; éliminant trois coefficients au moyen de ces équations de condition, il reste dans l'équation de l'espace un coefficient arbitraire. Elle est donc de la forme (6)

$$A + \beta B = 0,$$

et le plan $A = 0$, $B = 0$, intersection commune de tous les espaces qu'elle représente, passe par les trois points donnés.

Bien que les équations $A = 0$, $B = 0$ comportent ensemble huit constantes, le plan n'en demande en réalité que *six* pour être déterminé. En effet, toute combinaison linéaire de ces équations définit le même plan, de sorte qu'on peut leur substituer ces deux-ci :

$$A + \beta B = 0, \qquad A + \beta' B = 0;$$

il y a donc deux constantes arbitraires qu'il faut retrancher des huit constantes déterminant séparément les deux espaces, et il en reste six.

Ces six constantes essentielles correspondent au fait que le plan est déterminé par trois points, et que chacun d'eux y a deux degrés de liberté.

Deux points déterminent une droite. — Ensemble, ils impliquent huit constantes, mais, comme chacun a un degré de liberté sur la droite, il en reste *six* essentielles. En se reportant aux équations générales de la droite, qui sont les équations (2), on

voit aussi qu'elles contiennent ensemble *douze* constantes; mais on peut les remplacer par trois équations telles que les équations (7), contenant chacune deux paramètres arbitraires, et il reste ce même nombre de $12 - 3 \times 2 = 6$.

Enfin, *le point*, avec ses quatre coordonnées, dépend de quatre conditions.

En résumé :

Un espace est déterminé par	4	conditions,		
Un plan	»	6	»	,
Une droite	»	6	»	,
Un point	»	4	»	;

on remarquera la symétrie de ces nombres, sur laquelle nous aurons occasion de revenir (§§ 8 et 19).

CHAPITRE II.

INTERSECTIONS ET PARALLÉLISME.

§ 4. — Un espace et les autres champs.

Pour l'étude des intersections, nous avons à considérer successivement les diverses manières dont les champs peuvent être associés deux à deux, savoir :

Deux espaces,
Un espace et un plan,
Un espace et une droite;
Deux plans;
Un plan et une droite,
Deux droites.

On verra que, sauf trois catégories de cas particuliers, qui sont : la *coïncidence,* le *parallélisme* et la *présence simultanée dans un même champ,* l'intersection est un plan dans le premier cas, une droite dans le second, un point dans les troisième et quatrième, non existante dans les cinquième et sixième. Dans ces deux derniers cas, les deux champs ont une *plus courte distance,* question que nous ne faisons qu'indiquer parce qu'elle ne comporte que des calculs et ne présente pas de difficulté spéciale provenant de la quatrième dimension; elle se placerait après le Chapitre de la perpendicularité.

La discussion conduisant à ces résultats repose sur les faits suivants, acquis dans le premier Chapitre : Une équation linéaire unique entre les quatre coordonnées représente un espace. Deux, trois ou quatre de ces équations représentent deux, trois ou quatre espaces si elles sont indépendantes, et alors elles seront

écrites sur des lignes différentes. Elles représentent, dans ces trois cas respectivement, un plan, une droite ou un point si elles doivent être satisfaites ensemble, et alors elles seront écrites sur la même ligne ou réunies par une accolade. Enfin la simultanéité de plus de quatre équations ne peut avoir lieu, à moins qu'elles ne rentrent les unes dans les autres.

I. — DEUX ESPACES.

L'intersection de deux espaces $A = o$ et $B = o$ est représentée par l'ensemble de ces deux équations :

$$A = o, \qquad B = o,$$

et par conséquent est un plan. Mais il faut excepter les cas où l'on aurait

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4};$$

alors les deux équations, ou sont incompatibles, ou rentrent l'une dans l'autre.

C'est le second cas si le rapport $\frac{a_0}{b_0}$ a la même valeur que les autres. Alors, en désignant cette valeur par λ, la seconde équation se présente sous la forme

$$B = \lambda A = o$$

et ne diffère pas de la première; on dit que les deux espaces sont *coïncidents*.

C'est le premier cas si le rapport $\frac{a_0}{b_0}$ n'a pas la même valeur que les autres. Alors, en désignant par α une valeur différente de zéro, le polynome B se présente sous la forme $B = \lambda A + \alpha$, et la seconde équation revient au même que

$$B = A + \alpha = o,$$

car rien n'empêche de remplacer l'équation primitive $A = o$ par $\lambda A = o$. Dans ce cas, les deux espaces n'ont pas de point commun, et l'on dit qu'ils sont *parallèles*.

Pour donner une application, démontrons les trois propositions

énoncées au § 2, relativement à la génération du plan, de l'espace et de l'étendue, respectivement, par une droite, un plan et un espace se déplaçant parallèlement à eux-mêmes pendant qu'un de leurs points suit une droite fixe. Supposons d'abord que c'est une droite D, c'est-à-dire le champ du premier degré, représenté par les *trois* équations (2).

Puisqu'elle demeure parallèle à elle-même, tous les coefficients des coordonnées dans les trois équations sont des *constantes* et les termes portant l'indice zéro sont des *arbitraires*, au nombre de 3. Il faut exprimer :

1° Que la droite D passe par un certain point *variable* M, c'est-à-dire que ses équations sont satisfaites quand on y substitue les *quatre* coordonnées de ce point; cela donne trois équations de condition et porte à 6 le nombre des équations, à 7 celui des arbitraires;

2° Que le point M est toujours sur une droite *fixe*, c'est-à-dire que ses quatre coordonnées satisfont aux trois équations de celle-ci; le nombre des arbitraires n'est pas changé, mais celui des équations est porté à 9.

Nous avons donc, en définitive, un système de neuf équations dans lequel il y a sept arbitraires; la différence de ces nombres étant 2, le lieu est *un plan*, suivant le petit Tableau qui termine le § 2.

Si le champ mobile est un plan, le nombre primitif des équations est 2 et celui des arbitraires 2; ces nombres deviennent respectivement 4 et 6 dans 1°, 7 et 6 dans 2°; la différence finale est 1, ce qui veut dire que le lieu est *un espace*.

Si le champ mobile est un espace, on part avec 1 équation et 1 arbitraire; on porte ces nombres à 2 et 5 dans 1°, à 5 et 5 dans 2°, et, comme ces derniers sont égaux, le lieu n'est autre chose que l'*étendue*.

II. — UN ESPACE ET UN PLAN.

L'intersection d'un espace

$$A = 0$$

et d'un plan

$$B = 0, \qquad C = 0,$$

représentée par les trois équations réunies, est une droite. Mais il faut pour cela que l'espace ne soit parallèle à aucun des espaces générateurs du plan, lesquels sont donnés par l'équation générale

$$B + \gamma C = 0.$$

Ce parallélisme se réaliserait s'il était possible de satisfaire aux équations

$$\frac{b_1 + \gamma c_1}{a_1} = \frac{b_2 + \gamma c_2}{a_2} = \frac{b_3 + \gamma c_3}{a_3} = \frac{b_4 + \gamma c_4}{a_4} = \alpha.$$

Il n'en sera ainsi que pour certaines combinaisons particulières de valeurs des coefficients a, b, c, d, puisqu'on n'a que deux arbitraires α, γ pour quatre équations de condition. Dans ces cas particuliers, l'espace et le plan sont parallèles, et s'il se trouve qu'on ait aussi

$$\frac{b_0 + \gamma c_0}{a_0} = \alpha,$$

tous les points du second coïncideront avec des points du premier, ce qu'on exprime en disant qu'*il y est compris*.

III. — UN ESPACE ET UNE DROITE.

On verra de la même manière que l'intersection d'un espace et d'une droite est un point, mais que la droite peut être parallèle à l'espace ou y être contenue.

Il résulte de ce qui précède que l'intersection de *trois espaces* est une droite et celle de *quatre espaces* un point.

§ 5. — Deux plans.

Deux plans

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

se coupent en un point, qui est l'intersection des quatre espaces. Pour qu'un espace générateur du premier

$$A + \beta B = 0$$

et un espace générateur du second

$$C + \delta D = o$$

soient parallèles entre eux, il faut que

$$\frac{a_1 + \beta b_1}{c_1 + \delta d_1} = \ldots = \ldots = \frac{a_4 + \beta b_4}{c_4 + \delta d_4} = \alpha,$$

et, comme cela fait quatre équations de condition pour trois arbitraires β, δ, α, le parallélisme en question n'existera généralement pas. Si toutefois les coefficients a, b, c, d sont tels que ces quatre équations se réduisent à trois distinctes, il y aura deux espaces générateurs parallèles appartenant, l'un au premier plan, l'autre au second, et ceux-ci n'auront pas de point commun, au moins à distance finie.

Si l'on a en outre

$$\frac{a_0 + \beta b_0}{c_0 + \delta d_0} = \alpha,$$

ces deux espaces générateurs parallèles seront coïncidents : les deux plans se trouveront dans un même espace à trois dimensions et, comme on sait, ou ils se couperont suivant une ligne droite, ou ils seront parallèles, ou ils seront confondus en un seul.

Si l'on veut formuler la condition pour que deux plans se coupent suivant une droite et non suivant un point, il faut écrire que la solution des quatre équations $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$ se présente sous la forme $\frac{o}{o}$: c'est une question de *déterminants*.

§ 6. — Plans et droites.

I. *Un plan et une droite.* — Dans le cas d'un plan et d'une droite

$$\begin{cases} A = o \\ B = o \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C = o, \\ D = o, \\ E = o, \end{cases}$$

le nombre des équations est supérieur à celui des coordonnées, et il ne saurait être question d'intersection si elles sont distinctes.

Il y aura généralement, dans ce cas, un espace générateur du plan, savoir

$$A + \beta B = o$$

et un espace générateur de la droite, savoir

$$C + \delta D + \varepsilon E = o$$

qui seront parallèles. Car si l'on pose

$$\frac{a_1 + \beta b_1}{c_1 + \delta d_1 + \varepsilon e_1} = \ldots = \ldots = \frac{a_4 + \beta b_4}{c_4 + \delta d_4 + \varepsilon e_4} = \alpha,$$

le nombre de ces équations de condition se trouve juste égal à celui des arbitraires α, β, δ, ε. Si, après avoir déterminé celles-ci, il se trouve qu'on ait aussi

$$\frac{a_0 + \beta b_0}{c_0 + \delta d_0 + \varepsilon e_0} = \alpha,$$

les deux espaces générateurs parallèles coïncideront, la droite se trouvera avec le plan dans un même espace à trois dimensions, et elle pourra le couper, ou lui être parallèle, ou s'y trouver comprise.

II. *Deux droites.* — Dans ce dernier cas, on a les équations

$$\begin{cases} A = o, \\ B = o, \\ C = o, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D = o, \\ E = o, \\ F = o. \end{cases}$$

Ici encore, il ne saurait être question d'intersection ou de parallélisme, en thèse générale. Mais cette fois tout espace générateur d'une des deux droites a un parallèle parmi ceux de l'autre. En effet, pour que deux espaces générateurs

$$A + \beta B + \gamma C = o,$$
$$D + \varepsilon E + \varphi F = o$$

soient parallèles, il suffit qu'on puisse satisfaire aux équations

$$\frac{a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1}{d_1 + \varepsilon e_1 + \varphi f_1} = \ldots = \ldots = \ldots \frac{a_4 + \beta b_4 + \gamma c_4}{d_4 + \varepsilon e_4 + \varphi f_4} = \alpha,$$

ce qui sera toujours possible, puisqu'elles sont au nombre de

quatre et comportent *cinq* arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \varphi$. On pourra même, à raison de l'arbitraire en plus, satisfaire en même temps à l'équation

$$\frac{a+\beta b+\gamma c}{d+\varepsilon e+\lambda f}=\alpha$$

et avoir ainsi un espace générateur qui contienne à la fois les deux droites. Il suit de là que *tout système de deux droites se trouve entièrement dans un certain espace* (champ du troisième degré) et par conséquent, si on le considère seul, ne relève que de la géométrie à trois dimensions. On sait par celle-ci, et il serait facile de démontrer en restant dans notre méthode d'exposition, que les deux droites n'ont pas d'intersection si elles ne sont pas dans un même plan et qu'alors elles peuvent se couper ou être parallèles.

§ 7. — Les figures infiniment éloignées.

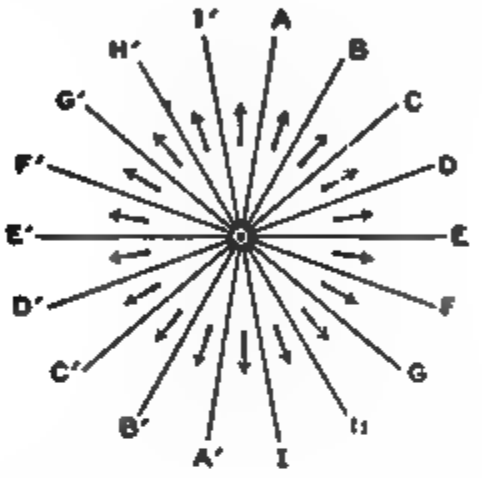
Par analogie avec ce qui se fait dans les géométries à deux et à trois dimensions, on peut dire de deux champs parallèles que leur intersection est *à l'infini*. Dans cette manière de voir, il faut considérer le lieu des points de l'étendue situés à l'infini comme étant *un espace* E. Cela résulte de ce que, si l'on porte dans l'équation générale $A = 0$ de l'espace, les valeurs $x_1 = \infty$, $x_2 = \infty \ldots$, il suffit, pour la satisfaire, de donner à a_0 une des deux valeurs $\pm\infty$, et cela quels que soient les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4. En sorte qu'un espace *quelconque* dont quatre points s'éloignent indéfiniment a toujours pour limite le même espace E, défini par l'unique paramètre $a_0 = \infty$, les autres étant arbitraires.

Il suit de là que le lieu des points d'un espace situés à l'infini est un *plan*, que celui des points d'un plan situés à l'infini est *une droite*, et qu'une droite possède à l'infini un *point unique;* car ces divers lieux ne sont autre chose que les intersections respectives d'un espace, d'un plan, d'une droite, avec un espace : celui que nous avons désigné par E et appelé le *lieu des points de l'étendue situés à l'infini*.

Comme ces résultats ont une apparence quelque peu paradoxale, il convient d'examiner la chose de près et de bien s'en rendre compte.

Pour cela, prenons un point quelconque r dans un plan P, et faisons en partir des rayons suivant toutes les directions possibles, deux rayons opposés formant ensemble une droite. Le lieu δ des points situés à l'infini sur ces rayons est bien une droite, mais non la droite *ordinaire, ouverte,* ou *euclidienne,* que nous avons considérée jusqu'ici et que l'on considère habituellement. C'est la droite *complète,* ou *fermée,* ou *riemanienne,* entourant le plan comme ferait une circonférence de cercle (*fig.* 2), mais ne

Fig. 2.



devant pas être confondue avec cette courbe. Car elle est bien du premier degré. Deux points la déterminent (il en faut trois pour une circonférence), à moins que ce ne soient deux points opposés, c'est-à-dire la partageant en deux parties égales et correspondant à deux rayons opposés du faisceau r : deux pareils points ne doivent être comptés que pour un. Cette droite qui entoure le plan, et que nous appellerons δ, doit être rapportée à une unité U, infinie du premier ordre relativement à l'unité u qui sert dans la région finie.

La figure 2, purement schématique bien entendu, représente cette droite. D'un côté, le faisceau r, pris dans la région finie du plan ; de l'autre, la droite ABC...A'B'C'... avec ses points opposés deux à deux, en correspondance univoque avec les rayons A, B, C... A', B', C'.

Supposons maintenant que le point r se déplace et coïncide successivement avec tous les point de la *région finie* du plan P. La droite δ se déplacera de même, et c'est le lieu de toutes ses positions qu'on appelle la *région infinie du plan.* Ce lieu est évidemment à deux dimensions, comme le plan P lui-même.

Mais une des dimensions, celle qui correspond aux déplacements de la droite δ, est du même ordre de grandeur que les déplacements de r, c'est-à-dire finie; elle est donc infiniment petite relativement à l'autre dimension et à l'unité U. Conformément aux lois de la hiérarchie infinitésimale, elle s'efface devant elles, et c'est dans ce sens qu'on dit que la région infinie du plan est une droite : la droite fermée, mais pouvant être remplacée à beaucoup d'égards par la droite ouverte.

De même pour un espace E :

Le lieu des points à l'infini des rayons issus d'un de ses points r est un *plan complet,* ou *riemanien,* ϖ, qu'il faut voir enveloppant l'espace à la façon d'une sphère, mais ne pas confondre avec cette surface. Chaque rayon du faisceau r et son opposé, formant ensemble une droite, rencontrent ce plan ϖ en deux points *opposés,* en lesquels se réunissent une infinité de droites complètes, comme le font les méridiens géographiques sur la sphère. Si le point r se déplace dans l'espace E de manière à y occuper successivement toutes les positions possibles, le plan ϖ se déplace semblablement, et le lieu de ses positions est la *région infinie de l'espace.* Ce lieu est à trois dimensions, mais une d'elles est un infiniment petit du premier ordre relativement aux deux autres et s'efface devant elles : c'est comme si toutes les positions du plan ϖ n'en faisaient qu'une, qui est le *plan complet* considéré comme formant la limite de l'espace.

De même enfin pour l'étendue. A première vue, on dira que sa *région de l'infini* est un espace ordinaire. On sera plus exact en disant que c'est un espace complet ε, être géométrique procédant du plan complet comme celui-ci procède de la droite complète. En toute rigueur, il faudrait dire que c'est le lieu *à quatre dimensions* d'une infinité d'espaces ε, correspondant un par un aux divers points de la région finie (1).

On peut faire la géométrie des régions infinies des champs, de ces droites, de ces plans et de ces espaces bizarres qui méconnaissent le postulatum d'Euclide; en d'autres termes on peut établir

(1) Voyez dans le journal *Mathesis,* 1898 : LECHALAS, *Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide;* MANSION, *Non-identité des plans de Riemann et de la sphère d'Euclide.*

pour eux, comme pour les autres, les conditions du parallélisme, de la perpendicularité, des distances et des angles.

On l'a faite, cette géométrie, et elle a été féconde. Voici pourquoi. Assurément les figures infiniment éloignées dans le plan ou dans l'espace sont moins inaccessibles au regard de notre esprit que celles hors de l'espace, mais ce n'est pas précisément de là que vient leur utilité. Elle vient, s'il nous est permis d'employer une pareille image, de ce qu'elles nous donnent les êtres géométriques *par leurs extrémités,* et 1° que ces extrémités ont une dimension de moins; 2° qu'à des infiniment petits près, ces extrémités sont communes à des catégories entières dont nous voyons les termes séparés, par exemple *les parallèles.*

Aussi la géométrie de la région infinie d'un champ n'est pas autre chose, moyennant certaines correspondances univoques faciles à établir, que celle du champ immédiatement supérieur. Les figures infiniment éloignées dans l'espace sont donc bien un véritable échelon vers celles qui sont extérieures à l'espace, et cet échelon est précieux pour la géométrie des dimensions multiples : à la voie analytique que nous avons adoptée parce qu'elle nous est plus familière et que nous supposons notre lecteur dans le même cas, il permet de substituer les méthodes de la Géométrie pure, supérieures en bien des points, il faut en convenir. C'est ainsi que procède *Veronese* dans *Fondamenti di Geometria.*

Les considérations qui précèdent montrent une tendance chez le mathématicien d'aujourd'hui à se figurer l'infini un peu autrement que ses prédécesseurs. Il en distingue deux formes, et cette distinction a pris un corps surtout entre les mains de Veronese en ce qui concerne la Géométrie, et de G. Cantor en ce qui concerne la Théorie des nombres (1). Dans l'une de ces formes,

---

(1) VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, p. 26-205, in-8°. Padoue, 1891. — *Il continuo rettilineo e l'assioma V° d'Archimedi* (*Atti dei Lincei*, 1890). — MANSION, dans *Mathesis*, 1896 et 1897.

G. CANTOR, *Fondements d'une théorie générale des ensembles* (*Acta math.*, t. II, 1883). — *Mitheilungen zur Lehre vom Transfiniten* (*Zeitschrift für Philosophie von Fichte*, 1887, p. 81 à 125 et 252 à 270). — *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis;* Paris, 1899.

DU BOIS-REYMOND, *Théorie générale des fonctions*, traduction par MILHAUD et GIROT; Paris, 1887.

depuis longtemps classique, l'infini se présente comme une grandeur variable *croissant* ou *décroissant* au delà de toute limite, car l'*infiniment grand* et l'*infiniment petit* sont comme deux pôles, qu'il ne faut pas traiter différemment; le mot *infini* est alors en quelque sorte synonyme de *illimité*. Dans l'autre, c'est un être géométrique qui a son individualité comme tous les individus de même nom situés dans le même champ, et ne saurait être confondu avec aucun d'eux; il est au-dessus du *fini* et de l'*illimité*, existant hors de nous au même titre que celui-là, tandis que celui-ci est simplement lié à notre pensée et ne serait rien s'il n'y avait pas d'être pensant. Nous nous contentons de présenter au lecteur ces deux idées, autour desquelles les passions se sont quelque peu exercées.

L'infini n'est d'ailleurs pas toujours le même pour un champ donné, car il dépend de la façon dont on envisage ce champ. Nous avons trouvé que c'est une droite pour le plan, un plan pour l'espace et un espace pour l'étendue, mais ces résultats sont essentiellement liés aux équations *linéaires* au moyen desquelles nous avons défini les champs. Dans d'autres cas, on trouvera que c'est une circonférence pour le plan, une sphère pour l'espace, une hypersphère (*voy.* § 31) pour l'étendue. Dans la théorie des fonctions, où l'on représente une variable imaginaire $x_1 + ix_2$ par un point dans un plan, et deux variables imaginaires $x_1 + ix_2$, $x_3 + ix_4$ par un point dans l'étendue, l'infini de chacun de ces champs est *un point*, et il peut paraître singulier de voir celui-ci *les envelopper;* d'ailleurs la fonction se comporte toujours autour de lui de la même manière qu'autour de tout autre point situé dans le fini. Dans les transformations planes par rayons vecteurs réciproques, c'est encore un point qui est l'infini du plan : dans cette transformation, qui n'est pas homographique, les points correspondent aux points, mais non les droites aux droites.

En réalité l'infini, celui de la grandeur comme celui de la petitesse, est *sans forme;* toutes les formes du fini arrivent à se confondre, quel que soit celui de ces deux pôles vers lequel on marche.

Le lecteur qui voudra approfondir cette discussion consultera avec fruit la magistrale Thèse de M. L. Couturat, ainsi que les

critiques faites dans la *Revue philosophique* par MM. Evellin et Émile Borel (1).

§ 8. — Les multiplicités.

L'équation d'un espace a quatre paramètres, et quatre espaces se coupent en un point comme quatre points déterminent un espace; on peut donc dire qu'il y a dans l'étendue un ∞^4 d'espaces comme il y a un ∞^4 de points. Il est clair qu'il y a de même dans un espace un ∞^3 de plans et dans un plan un ∞^2 de droites; il est intéressant de connaître aussi les nombres analogues pour les cas intermédiaires.

Prendre un point quelconque dans l'étendue peut se faire de ∞^4 manières; le joindre par une droite à un point quelconque de l'infini peut se faire de ∞^3 manières, puisque les points de l'infini forment un espace. Cela donne un ∞^7 de droites; mais chacune d'elles est ainsi comptée un ∞ de fois, puisqu'elle contient un ∞ de points. Reste donc un ∞^6 pour le nombre des droites existant dans l'étendue.

Par quelques raisonnements de ce genre, et en récapitulant les valeurs déjà obtenues, on trouve qu'un champ donné contient un champ de degré inférieur d'espèce donnée un nombre de fois égal à une puissance de l'infini ayant l'exposant indiqué dans le Tableau suivant :

DEGRÉ DU CHAMP.	EXPOSANT POUR			
	les points.	les droites.	les plans.	les espaces.
Deuxième.....	2	2	//	//
Troisième.....	3	4	3	//
Quatrième.....	4	6	6	4

(1) COUTURAT, *De l'infini mathématique*, Thèse de doctorat ès lettres, in-8°, 1896.

EVELLIN, *L'infini nouveau* (*Rev. phil.*, 1898, p. 113 et 473; 1900, p. 135).

ÉMILE BOREL, *Rev. phil.*, 1899, p. 383.

La formule est (1)

$$(r+1)(n-r),$$

n désignant le degré plus élevé et r le degré inférieur.

Une pareille supputation pour les nombres de figures, ou de conditions, ou de manières de faire une chose, etc., est souvent et utilement employée dans la *Théorie générale des Surfaces,* la *Géométrie énumérative* et la *Géométrie philosophique.*

On est ainsi amené à considérer des *multiplicités* (en allemand *Mannifaltigkeiten,* en anglais *manifoldness*) *de divers ordres.* Les multiplicités fondamentales sont les suivantes :

1° Celles à une dimension, ou à un ∞^1 de termes. Ce sont : — l'ensemble des *points* qui forment une droite : M. Chasles l'appelle une *division;* on dit beaucoup aujourd'hui une *ponctuelle* (en italien *puntegiatta,* en anglais *range,* en allemand *Punktreihe*); — l'ensemble des *droites* qui partent d'un même point, — celui des *plans* qui partent d'une même droite, — celui des *espaces* qui partent d'un même plan. Le mot *faisceau* est employé pour les trois dernières formes;

2° Celles à deux dimensions, ou qui ont un ∞^2 de termes. Ce sont : — l'ensemble des *points* ou des *droites* qui forment un plan, — celui des *droites* ou des *plans* qui partent d'un même point, — celui des *plans* ou des *espaces* qui partent d'une même droite;

3° Celles à trois dimensions, ou qui ont nn ∞^3 de termes. Ce sont : — les *points* ou les *plans* d'un espace; — les *droites* ou les *espaces* partant d'un même point;

4° Enfin celles à quatre dimensions, ou comprenant un ∞^4 de termes. C'est l'ensemble des *points* ou des *espaces* qui composent l'étendue.

Toutes ces formes sont *linéaires.* On peut citer comme exemple de celles qui ne le sont pas : les cercles d'un plan, qui forment un ∞^3; les coniques d'un plan, qui forment un ∞^5; les droites d'un espace et les plans passant par un même point, qui sont des ∞^4; les droites et les plans de l'étendue, qui sont des ∞^6, etc.

---

(1) VERONESE, *Le Superficie omaloide normale a due dimenzioni e del 4° ordine dello spazio a cinque dimenzioni* (*Accad. dei Lincei,* vol. XIX, p. 8).

Comme trois points déterminent un plan, on pourrait croire que les plans qui passent par deux points (ou par une droite) forment un ∞^1, c'est-à-dire une multiplicité du premier ordre. On se tromperait, car c'est un ∞^2 ; en effet, on peut mener un plan par la droite donnée et par chacun des points de l'espace de l'infini, dont le nombre est ∞^3 ; mais il s'en trouve un ∞ dans chacun des plans ainsi menés, ce qui réduit à ∞^2 le nombre de ceux-ci.

Le même fait se rencontre dans la Géométrie à trois dimensions, où l'on pourrait croire, à première vue, que, puisqu'une droite est déterminée par deux points, il passe un ∞^1 de droites par un point donné, tandis que c'est un ∞^2.

CHAPITRE III.

PERPENDICULARITÉ.

§ 9. — Distance de deux points.

Nous appelons *distance* de deux points dont les coordonnées sont respectivement

$$(x_i) \qquad x_1, x_2, x_3, x_4,$$

et

$$(y_i) \qquad y_1, y_2, y_3, y_4,$$

une fonction de ces coordonnées ayant pour carré

$$(1) \qquad \Delta^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2.$$

Cette formule, *qui est, avec la présomption des quatre coordonnées, toute la base de la Géométrie à quatre dimensions,* résulte de l'addition d'un terme à celle employée avec des coordonnées rectangulaires dans la Géométrie à trois dimensions, de même que cette dernière résulte de l'addition d'un terme à celle employée dans la Géométrie à deux dimensions.

Comme première application de la formule (1), démontrons le théorème suivant, qui servira plus loin pour l'établissement des systèmes de coordonnées : *Les segments interceptés par deux espaces parallèles sur des droites parallèles ont la même longueur.*

A cet effet, soient

$$(1) \qquad A = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

$$(2) \qquad A' = A + \alpha_0$$

les équations de deux espaces parallèles, et

$$(3)\qquad \begin{cases} B = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0, \\ C = c_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ D = d_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

$$(4)\qquad B' = B + \beta_0, \qquad C' = C + \gamma_0, \qquad D' = D + \delta_0$$

celles de deux droites parallèles. Les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de l'intersection de la première droite avec le premier espace satisfont aux équations (1) et (3); celles y_1, y_2, y_3, y_4 de l'intersection de cette même droite avec le deuxième espace satisfont aux équations (2) et (3); on a donc, en substituant et retranchant,

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1(x_1 - y_1) + \ldots + a_4(x_4 - y_4) - \alpha_0 = 0, \\ b_1(x_1 - y_1) + \ldots + b_4(x_4 - y_4) - \beta_0 = 0, \\ c_1(x_1 - y_1) + \ldots + c_4(x_4 - y_4) - \gamma_0 = 0, \\ d_1(x_1 - y_1) + \ldots + d_4(x_4 - y_4) - \delta_0 = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 et y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 de l'intersection de la deuxième droite avec le premier et avec le second espace satisfont aux équations (1) et (4), (2) et (4). En faisant les mêmes opérations on aura les mêmes équations (5) avec les x et les y accentués; il en résulte

$$\begin{cases} x'_1 - y'_1 = x_1 - y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_4 - y'_4 = x_4 - y_4, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(x'_1 - y'_1)^2 + \ldots + (x'_4 - y'_4)^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_4 - y_4)^2,$$

ce qui n'est autre chose que la proposition énoncée.

Lorsque deux espaces sont parallèles, on peut dire d'une figure, *quelle qu'elle soit,* située dans l'un d'eux qu'elle est parallèle à l'autre, car tous ses points en sont à la même distance.

§ 10. — Distance d'un point à un champ.

La distance d'un point p à un espace, un plan ou une droite, est la *distance du point p au point q de ce champ qui est le plus*

rapproché de lui. Le point q s'appelle la *projection* du point p sur le champ considéré. Nous allons chercher le lieu des points de l'étendue qui ont la même projection q : 1° sur un espace donné A, 2° sur un plan donné P, 3° sur une droite donnée D.

1° *Sur un espace* A. — Soit

$$\text{A} = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 \tag{2}$$

son équation, et soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point p extérieur à A, y_1, y_2, y_3, y_4 celles de sa projection sur A. Ces dernières satisfont à l'équation (2). D'autre part, l'expression (1) doit être moindre pour le point q que pour tout autre point de A situé dans son voisinage et ayant pour coordonnées $y_i + dy_i$. On exprimera d'abord que cet autre point q' est situé dans A en différentiant l'équation (2)

$$a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 + a_4 dy_4 = 0, \tag{3}$$

et ensuite que pq est $< pq'$, en égalant à zéro la différentielle de (1):

$$(x_1 - y_1)\,dx_1 + \ldots + \ldots + (x_4 - y_4)\,dx_4 = 0. \tag{4}$$

L'équation (4) devant être satisfaite toutes les fois que l'équation (3) le sera, on devra avoir, en désignant par λ un multiplicateur convenable

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = \lambda a_1; \\ x_2 - y_2 = \lambda a_2; \\ x_3 - y_3 = \lambda a_3; \\ x_4 - y_4 = \lambda a_4. \end{cases} \tag{5}$$

Si l'on élimine λ entre ces équations, il en reste trois :

$$\frac{x_1 - y_1}{a_1} = \frac{x_2 - y_2}{a_2} = \frac{x_3 - y_3}{a_3} = \frac{x_4 - y_4}{a_4}, \tag{6}$$

qui, jointes à (2), déterminent les quatre coordonnées y_i de la projection q quand on se donne celles x_i du point extérieur.

Mais supposons qu'on se donne au contraire le point q de l'espace A, alors les y_i sont invariables, et les équations (6), en y considérant les x_i comme des coordonnées courantes, représentent le lieu des points dont la projection sur A tombe en q. C'est une droite, puisque ces équations sont au nombre de trois.

La ligne droite pq peut donc bien s'appeler la *perpendiculaire abaissée du point p sur l'espace* A. Et si l'on prend sur cette droite pq un autre point quelconque p', la perpendiculaire $p'q'$ abaissée de cet autre point sur le même espace A coïncidera avec pq.

2° *Sur un plan* P. — Dans ce cas, nous avons, au lieu de l'équation unique (2), deux équations

$$(2') \qquad A = 0, \qquad B = 0,$$

et l'équation (3) est aussi remplacée par deux autres:

$$(3') \qquad \begin{cases} a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 + a_4 dy_4 = 0. \\ b_1 dy_1 + b_2 dy_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{cases}$$

Rien n'est changé dans l'équation (4) et, comme elle doit être satisfaite toutes les fois que les équations (3') le seront, on devra avoir, en désignant par λ, μ deux coefficients indéterminés:

$$(5') \qquad \begin{cases} x_1 - y_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \\ x_2 - y_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \\ x_3 - y_3 = \lambda a_3 + \mu b_3, \\ x_4 - y_4 = \lambda a_4 + \mu b_4; \end{cases}$$

si l'on élimine λ, μ, il reste deux équations

$$(6') \qquad C = 0, \qquad D = 0,$$

qui, jointes aux équations (2'), déterminent y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction des x_i. Mais si l'on considère les premières comme invariables et les secondes comme des coordonnées courantes, alors les équations (6') représentent le lieu des points dont la projection sur le plan P tombe en q. C'est un plan, puisqu'il y a deux équations.

3° *Sur une droite* D, dont soient

$$(2'') \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

les équations. Les équations (3') s'augmentent d'une troisième, où les a de la première et les b de la seconde sont remplacés par des c, et les équations (5') deviennent, avec trois indéterminées:

$$(5'') \qquad \begin{cases} x_1 - y_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_4 - y_4 = \lambda a_4 + \mu b_4 + \nu c_4, \end{cases}$$

dont l'élimination donnerait une équation unique

$$D = 0, \tag{6''}$$

équation d'un espace.

§ 11. — Applications.

Pour donner de suite une application simple de chaque cas, proposons-nous de trouver :

1° La perpendiculaire menée par le point

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$$

à l'espace

$$y_4 = 0;$$

il faut faire $a_4 = 1$, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$; les équations (5) deviennent alors

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -\lambda,$$

d'où, en éliminant λ,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

ce qui est la droite demandée.

2° Le plan mené par le même point perpendiculairement au plan

$$y_3 = 0, \quad y_4 = 0;$$

les équations (5') deviennent

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\lambda, \quad x_4 = -\mu,$$

d'où, en éliminant λ et μ,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

ce qui est le plan demandé.

3° Enfin l'espace mené par le même point perpendiculairement à la droite

$$y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0;$$

les équations (5'') deviennent

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\lambda, \quad x_3 = -\mu, \quad x_4 = -\nu,$$

d'où, en éliminant λ, μ et ν,

$$x_1 = 0,$$

ce qui est l'espace demandé.

Les droites, les plans et les espaces que cet exemple a présentés incidemment ne sont autre chose que les éléments d'un système de coordonnées rectangulaires, comme on le verra plus loin.

§ 12. — Perpendicularité de deux champs.

Cherchons maintenant les conditions de perpendicularité d'un champ K_2 sur un autre K_1 passant par un même point de l'étendue; nous exprimerons cette perpendicularité par le fait que *chacun des points du premier se projette sur le second en un point de leur intersection*. Si les deux champs n'ont aucun point commun, on leur mène des parallèles K'_2 et K'_1 par un point quelconque et l'on dit que K_2 est perpendiculaire à K_1 si K'_2 l'est à K'_1.

Nous considérons d'abord deux espaces

$$A = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4,$$
$$B = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4,$$

et nous exprimons que le second est perpendiculaire au premier. Un point quelconque x_1, x_2, x_3, x_4 de B est lié à sa projection y_1, y_2, y_3, y_4 sur A par les relations (5), et, pour que B soit perpendiculaire à A, il faut, par définition, que y_1, y_2, y_3, y_4 satisfassent aussi à l'équation de B. En les y substituant, puis retranchant l'une de l'autre les deux équations (B), il vient

$$b_1 (x_1 - y_1) + b_2 (x_2 - y_2) + b_3 (x_3 - y_3) + b_4 (x_4 - y_4) = 0;$$

portant dans cette dernière équation les valeurs (5), elle devient

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0, \tag{7}$$

d'où λ s'est éliminé lui-même parce qu'il s'est trouvé facteur commun à tous les termes du premier membre. Telle est la condition pour que B soit perpendiculaire à A; sa forme symétrique montre que la perpendicularité est réciproque.

On raisonnera de la même manière pour toute autre association de deux champs, et l'on trouvera que la condition de perpendi-

cularité s'exprime par des formules semblables à (7), associant chacune des équations afférentes à l'un des deux champs avec chacune des équations afférentes à l'autre, par conséquent en nombre égal au produit des nombres des équations de chaque sorte. Comme ces équations représentent des espaces, cela revient à dire que chacun des espaces déterminants de l'un des deux champs doit être perpendiculaire à chacun des espaces déterminants de l'autre.

Ainsi la perpendicularité dépend de :

Deux	conditions,	quand il s'agit	de deux espaces,
Deux	»	»	d'un espace et d'un plan,
Trois	»	»	d'un espace et d'une droite,
Quatre	»	»	de deux plans,
Six	»	»	d'un plan et d'une droite,
Neuf	»	»	de deux droites.

NOTA. — Nous ne nous sommes pas arrêtés, dans ce Chapitre ni dans le précédent, à la discussion analytique des *cas particuliers* du parallélisme et de la perpendicularité. Dans le Chapitre IV, ces cas vont être considérés au point de vue géométrique.

CHAPITRE IV.

QUELQUES THÉORÈMES.

Ici se placerait, si nous écrivions un Traité tout à fait méthodique, un Chapitre correspondant au cinquième Livre de Legendre et contenant une grosse gerbe de théorèmes. Nous en cueillons quelques-uns, ou parce qu'ils nous seront utiles dans la suite, ou parce qu'ils contribuent à donner la physionomie de la Géométrie à quatre dimensions.

§ 13. — Droites, plans et espaces parallèles.

I. Deux espaces sont parallèles quand leurs plans à l'infini (*voir* § 7) se confondent en un seul.

Une droite et un espace sont parallèles quand le point à l'infini de la première est sur le plan à l'infini du second.

Par un point donné hors d'un espace, on demande de lui mener un espace parallèle. Il n'y a qu'à mener par le point donné trois droites parallèles à trois droites prises d'une manière quelconque dans l'espace donné, pourvu que celles-ci ne soient ni dans un même plan, ni parallèles à un même plan. Ces trois lignes déterminent l'espace cherché.

II. Les plans ont deux manières d'être parallèles. Soient A et B deux plans, a et b les droites qu'ils ont chacun dans l'espace de l'infini. Ces droites peuvent : 1° ne pas se rencontrer : c'est le cas général, et il n'y a aucune espèce de parallélisme; 2° avoir un point commun : on dit alors que les deux plans sont *parallèles suivant le premier mode,* ou *incomplètement parallèles;* 3° se

confondre en une seule : on dit alors que le parallélisme est du *deuxième mode* ou *complet*.

Des propriétés différentes correspondent aux deux modes. Par exemple, s'il s'agit du premier, on ne peut mener dans chaque plan, par un de ses points, qu'une seule droite qui soit parallèle à l'autre; quand il s'agit du second, toutes les droites de chaque plan ont le parallélisme.

Ainsi encore, si un plan est parallèle à un espace, il est parallèle à tous les plans contenus dans celui-ci, mais non à tous de la même manière, car sa droite à l'infini coupe la droite à l'infini des uns et coïncide avec celle des autres.

Quand deux plans sont parallèles suivant le premier mode, un plan quelconque les coupe chacun suivant un point, à moins qu'il ne soit l'intersection de deux espaces passant par chacun des plans donnés, auquel cas il passe par le point commun qu'ils ont à l'infini et les coupe suivant deux droites.

§ 14. — Droites, plans et espaces perpendiculaires.

Les théorèmes qui suivent concernent la perpendicularité entre

les droites et les espaces,
les plans et les plans,
les droites et les plans,
les plans et les espaces,

et la plupart ont des applications dans la *Géométrie descriptive* (Chap. VI et VIII).

I. Quand une droite et un espace sont perpendiculaires entre eux, la première l'est à toutes les droites et à tous les plans menés par son pied dans le second. Car, puisque tous les points de celui-ci se projettent en un même point de la droite, il en est ainsi, en particulier, pour ceux d'entre eux qui s'alignent suivant une même droite, et pour ceux d'entre eux qui sont sur un même plan.

Réciproquement, l'espace est perpendiculaire à tous les plans générateurs de la droite, et à tous les espaces générateurs d'un quelconque de ces plans.

Quand une droite d, coupant un espace E en un point O, est perpendiculaire à deux plans menés par ce point dans cet espace, elle est perpendiculaire à celui-ci. Menons en effet, par le point O, une droite dans chacun des deux plans; on sait, par la géométrie à trois dimensions, que d sera perpendiculaire à chacune de ces deux droites, et qu'elle le sera par conséquent à leur plan; elle est donc perpendiculaire à un plan quelconque mené par le point O dans l'espace E.

Des droites perpendiculaires à un même espace sont parallèles entre elles, et des espaces perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.

II. On demande de *mener, par un point donné* P, *un espace perpendiculaire à une droite donnée* D. Si le point est sur la droite, menez par celle-ci trois plans non situés dans un même espace, et, dans chacun d'eux, menez par le point P la perpendiculaire à la droite D; ces trois lignes détermineront l'espace cherché. Si le point P est hors de la droite D, abaissez, dans le plan PD, une perpendiculaire de P sur D et, par le pied de celle-ci, menez l'espace perpendiculaire à D, comme on vient de le dire.

On demande de *mener, par un point donné* P, *une droite perpendiculaire à un espace donné* E. Si le point est situé dans l'espace E, menez dans celui-ci trois droites non dans un même plan, et, par le point donné, un espace perpendiculaire à ces trois droites, comme dans la première solution ci-dessus; l'intersection des trois espaces sera la droite demandée. Si le point donné est hors de l'espace E, la construction se formule dans les mêmes termes, mais en visant la deuxième solution.

Par un point donné sur une droite, on peut lui élever, si elle est donnée :

Dans un plan (géométrie à deux dimensions), une seule droite perpendiculaire;

Dans un espace (géométrie à trois dimensions), un ∞ de droites perpendiculaires dont le lieu est un plan; un seul plan perpendiculaire;

Dans l'étendue, un ∞^2 de droites perpendiculaires dont le lieu est un espace; un ∞^1 de plans perpendiculaires dont le lieu est le même espace; un seul espace perpendiculaire.

III. De même qu'ils ont deux espèces de parallélisme, les plans ont aussi deux manières d'être perpendiculaires. Si leurs droites à l'infini se rencontrent, on dit qu'ils sont *simplement* ou *incomplètement* perpendiculaires; si elles ne se rencontrent pas, on dit qu'ils sont *absolument* ou *complètement* perpendiculaires.

Considérons deux plans A, B se trouvant dans le premier cas, et soient a, b leurs droites de l'infini. Admettons en outre qu'ils se coupent suivant une même droite d, c'est-à-dire sont dans un même espace E, dans lequel sont aussi, dès lors, les droites a, b, d. Tous les plans passant par la droite a sont complètement parallèles au plan A et, comme lui, simplement perpendiculaires à B. Or ces plans, en nombre ∞^2 (§ 8, à la fin), sont de deux sortes : les uns, dont le nombre est ∞^1, sont dans l'espace E et coupent B suivant une droite; les autres sont hors de cet espace et coupent B suivant un point.

Les plans en perpendicularité simple avec un plan donné peuvent donc couper ce plan, ou suivant une droite, ou suivant un point; ceux de la deuxième catégorie lui sont en même temps incomplètement parallèles.

Deux plans complètement parallèles à deux plans complètement ou incomplètement perpendiculaires sont complètement ou incomplètement parallèles entre eux.

Quand deux plans sont complètement perpendiculaires entre eux, une droite quelconque de l'un est perpendiculaire à une droite quelconque de l'autre; quand ils sont incomplètement perpendiculaires, il y a dans chacun une direction, *et une seule,* qui est perpendiculaire à toutes les droites de l'autre.

Un plan B, qui est incomplètement perpendiculaire à un plan A, l'est suivant le même mode à tout plan complètement perpendiculaire à A.

Si, par le point commun de deux plans A, B absolument perpendiculaires entre eux, on trace une droite dans chacun d'eux, le plan C déterminé par ces deux droites est simplement perpendiculaire à chacun des deux plans A, B; il y a un ∞^2 de plans C.

Le Tableau suivant (1) réunit les particularités que peut présenter l'incidence de deux plans :

(1) D'après SCHOUTE, *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1900, 2e partie, p. 187.

INTERSECTION DES DEUX PLANS.		PARALLÉLISME.	PERPENDICULARITÉ.	OBSERVATIONS.
à distance finie.	un point...	nul	nulle	cas général
		nul	incomplète	A
		nul	complète	B
	une droite.	nul	nulle	cas général
		incomplet	nulle	C
		incomplet	incomplète	D
à l'infini.	un point...	incomplet	nulle	E
		incomplet	incomplète	F
	une droite.	complet	nulle	G

Quand le lecteur aura fait connaissance avec l'usage des coordonnées (§ 16), il pourra exemplifier ces différents cas de la manière suivante. En prenant invariablement

$$x_3 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

pour les équations d'un des deux plans, et en prenant successivement pour l'autre les équations

$$x_1 + \lambda x_2 = 0,\ x_1 + \mu x_4 = 0,$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,$$
$$x_1 + \lambda x_4 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = 0,$$
$$x_1 + \lambda x_2 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = 0,$$
$$x_1 + \lambda x_4 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = k,$$
$$x_1 + \lambda x_2 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = k,$$
$$x_3 = k,\ x_4 = k'.$$

on a respectivement les cas A, B, C, D, E, F, G.

On demande de *mener, par un point* M *donné sur un plan, un autre plan qui lui soit complètement perpendiculaire.* On mènera deux droites quelconques dans le plan donné, puis un espace perpendiculaire à chacune d'elles, par le point donné ; l'intersection des deux espaces sera le plan demandé.

Si le point donné M est extérieur au plan, on mènera par ce point deux droites respectivement parallèles à deux droites quelconques du plan, et l'on fera la même construction.

IV. Par un point O donné sur un plan A, on peut mener un ∞

de droites perpendiculaires à celui-ci ; leur lieu est le plan B absolument perpendiculaire à A.

Mais par un point m donné hors d'un plan A, on ne peut mener qu'une seule droite qui lui soit perpendiculaire ; car cette perpendiculaire se trouve forcément dans l'espace mA, et elle est par suite déterminée comme dans la géométrie à trois dimensions.

La *projection d'un point m sur un plan* A peut être conçue de deux manières qui reviennent au même : 1° Par le point m et le plan A, on mène un espace E, puis, dans cet espace, on abaisse une perpendiculaire de m sur E comme l'enseigne la géométrie à trois dimensions. 2° Par le point m, on mène un plan A′ perpendiculaire à A suivant le mode absolu, et l'on appelle projection de m sur A l'intersection de A′ avec A. Si l'on projette une multiplicité de points m formant une figure quelconque, tous les plans projetants A′ sont complètement parallèles entre eux, c'est-à-dire sont les membres d'un même faisceau ∞^1 dont l'axe est à l'infini ; si la figure est une surface plane, le rapport de l'aire à sa projection demeure constant.

Tous les points qui ont la même projection sur un plan donné sont dans un même plan.

La *projection d'un point sur un espace* est le pied de la perpendiculaire, unique et déterminée, abaissée du premier sur le second. Voici une application de ce genre de projection.

On démontre sans peine les théorèmes suivants :

1° La projection d'une sphère de rayon R sur un espace faisant avec le sien l'angle φ est un ellipsoïde de révolution aplati dont l'axe est dans le plan perpendiculaire à la fois aux deux espaces et a pour longueur $2R\cos\varphi$.

2° La projection de celui-ci sur un troisième espace faisant avec le sien un angle φ' est un ellipsoïde à trois axes inégaux.

3° La projection d'un parallélépipède, de dimensions finies ou infiniment petites, sur un espace faisant avec le sien un angle φ' a pour volume celui du parallélépipède multiplié par $\cos\varphi'$.

4° Par application de 2° et 3°, le volume de l'ellipsoïde à trois axes inégaux $2a$, $2b$, $2c$, est $\frac{4}{3}\pi abc$ (1).

(1) D'après DE LA RIVE, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1895.

V. Quand un espace E et un plan P sont perpendiculaires entre eux : 1° si l'on projette sur le second un point quelconque du premier, la projection, nous le savons déjà, est toujours sur leur commune intersection; 2° le plan P est incomplètement perpendiculaire à tous les plans menés dans l'espace E par cette commune intersection; 3° les plans et les espaces respectivement parallèles à P et à E sont perpendiculaires entre eux.

Par une droite donnée hors d'un espace E, on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à celui-ci ; il contient les perpendiculaires abaissées des divers points de la droite sur cet espace; tous les pieds de ces perpendiculaires sont sur une même ligne droite, qui s'appelle la *projection orthogonale* de la droite sur l'espace E.

Par une droite donnée hors d'un plan P, on ne peut mener qu'un seul espace perpendiculaire à celui-ci; il contient les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la droite sur le plan P, et les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite. Il contient aussi les plans absolument perpendiculaires menés d'un point quelconque de la droite au plan P; les points d'intersection de ces plans avec le plan P sont en ligne droite.

VI. *On demande de mener, par un point donné* O, *quatre droites perpendiculaires entre elles.* On mènera par le point O une première droite x_1, ce qui peut se faire de ∞^3 manières; puis une seconde droite x_2 perpendiculaire à x_1, ce qui peut se faire de ∞^2 manières; puis une troisième droite x_3 perpendiculaire au plan x_1x_2, ce qui peut se faire de ∞^1 manières; enfin, comme il vient d'être dit, une quatrième droite x_4 perpendiculaire à l'espace $x_1x_2x_3$, ce qui ne peut se faire que d'une manière.

Chacune des droites

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$$

est perpendiculaire à une quelconque des trois autres, au plan de deux quelconques des trois autres, à l'espace des trois autres.

Chacun des espaces

$$x_1x_2x_3, \quad x_2x_3x_4, \quad x_3x_4x_1, \quad x_4x_1x_2$$

est perpendiculaire aux trois autres.

Chacun des plans

$$x_1x_2, \quad x_2x_3, \quad x_3x_4, \quad x_4x_1, \quad x_1x_3$$

est incomplètement perpendiculaire à celui qui est écrit après lui. Enfin les deux plans de chacun des trois couples

$$x_1x_2 \text{ et } x_3x_4, \quad x_1x_3 \text{ et } x_2x_4, \quad x_2x_3 \text{ et } x_4x_1$$

sont complètement perpendiculaires entre eux.

La construction, qui peut se faire de ∞^6 manières, donne donc, non seulement quatre droites perpendiculaires deux à deux, mais encore quatre espaces satisfaisant à la même condition.

§ 13. — Rotation d'un espace.

I. Si, dans l'équation (6) du § 2, on fait passer β par toutes les valeurs possibles, on a une suite infinie d'espaces ayant cela de commun que tous contiennent le plan $A = o$, $B = o$; c'est un *faisceau d'espaces* dont ce plan est *l'axe*.

On peut concevoir aussi que c'est le même espace passant par une infinité de positions successives pendant qu'un plan qui y est contenu demeure fixe. Un pareil mouvement s'appelle la *rotation de l'espace autour du plan*. La géométrie à deux dimensions ne connaît qu'une seule rotation, celle *autour* d'un point, qui s'appelle le *centre de rotation;* dans la géométrie de l'espace, il n'y en a qu'une également, celle autour d'une droite, qui s'appelle l'*axe instantané ou permanent de rotation*. Dans l'étendue, c'est la rotation autour d'un plan qui est le mouvement le plus simple après celui de pure translation. Il est nécessaire de bien le comprendre.

Dans un espace E, par exemple le nôtre, considérons un plan P et appelons A, B les deux régions de l'espace situées de part et d'autre de celui-ci; puis, prenant sur le plan P un point O, menons-lui par ce point une perpendiculaire, dont soient Oa la partie qui pique dans la région A, Ob, celle qui pique dans la région B. Nous pouvons faire la même chose sur un autre point quelconque du plan P, où il y aura toujours une perpendiculaire unique et déterminée, puisque nous demeurons dans un espace E; le nombre total de ces perpendiculaires, égal à celui des points du plan P,

est ∞^2. Elles accomplissent ensemble, dans la rotation dont il s'agit, le mouvement que nous allons décrire pour une d'elles.

Mettons en mouvement à la fois la région A et la région B, dans le même sens et de telle sorte que les points qui leur sont communs, qui sont tous les points du plan P, ne bougent pas. La droite $a0b$ tourne autour du point 0 sans cesser d'être perpendiculaire au plan P, c'est-à-dire de faire un angle droit avec une droite quelconque menée par le point 0 dans ce plan; elle engendre un plan R qui est perpendiculaire, *au sens absolu,* au plan P et n'a de commun avec lui que le point 0. Lorsqu'elle y a parcouru un angle de 180° (la moitié du plan R), il en est de même de toutes ses pareilles, chacune dans son plan R, et la région A prend la place qu'occupait primitivement la région B, celle-ci la place qu'occupait primitivement la région A. Le mouvement se continuant, la droite $a0b$ décrit la seconde moitié du plan R, et, finalement, chaque région A, B reprend sa place primitive. L'espace E a parcouru l'étendue entière.

Dans le mouvement, le plan P demeure absolument fixe, c'est-à-dire qu'aucun de ses points ne change de place. Il n'en est pas de même des plans R : ils ne changent pas de position dans l'espace E ni dans l'étendue, mais chacun d'eux tourne comme une roue autour du point 0 qui lui est commun avec le plan P. L'angle ainsi décrit est le même pour tous les plans R et s'appelle l'*angle de rotation.*

Chacun des ∞^2 plans qui passent par le point 0 et sont *simplement perpendiculaires* au plan P, coupe celui-ci suivant une ligne fixe p et le plan R suivant une ligne r mobile. Si l'on ne considère que ceux de ces plans passant par une même ligne p, leur mouvement est le même que celui des plans autour de l'axe de rotation dans la géométrie à trois dimensions.

Il sera toujours question du mouvement qu'on vient de décrire lorsque le mot *rotation* sera employé seul; on l'appelle aussi une *rotation simple* ou une *rotation autour d'un plan.* La formation des images réfléchies, en les supposant réelles, est le phénomène du monde à trois dimensions qui se rapproche le plus de celui de la rotation autour d'un plan dans le monde à quatre.

II. Afin de retenir encore un peu l'attention du lecteur sur ce mouvement, nous en ferons l'application à une question des plus simples : celle des deux trièdres symétriques, qu'il est impossible de superposer dans l'espace à trois dimensions, de même qu'il est impossible de mettre sur une main le gant de l'autre main.

Considérons d'abord, en Géométrie plane et à titre préliminaire, deux triangles *abc*, *b'a'c'* (*fig.* 3) ayant tous leurs éléments égaux, mais non disposés dans le même sens : celui-ci sera pris de la gauche à la droite pour un observateur placé à l'intérieur du triangle, debout sur le plan. On sait qu'il est impossible de *superposer* les deux triangles, à moins qu'on n'ait la faculté d'en

Fig. 3.

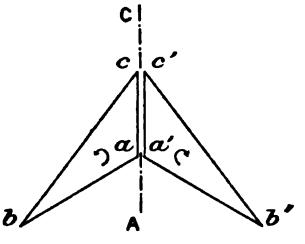
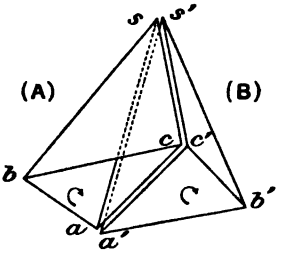


Fig. 4.



sortir un du plan, mais qu'alors on y arrive facilement. Si l'on veut réduire au minimum le déplacement à faire *en dehors du plan,* on amènera, par des glissements et des rotations dans le plan, deux côtés homologues l'un contre l'autre le long d'une ligne quelconque AC, puis on fera tourner autour de celle-ci, de 180°, la région du plan qui contient un des triangles.

Considérons maintenant, dans la Géométrie de l'espace, deux trièdres dont tous les éléments sont égaux, mais non disposés dans le même sens, celui-ci étant pris de la gauche à la droite pour un observateur placé dans le trièdre, la tête du côté du sommet (*fig.* 4). On sait qu'il est impossible de superposer les deux trièdres. Mais nous y arriverons aisément si nous disposons de la quatrième dimension. Pour réduire au minimum le déplacement à accomplir dans celle-ci, commençons par accoler l'une contre l'autre, suivant un plan P, deux faces homologues *a*S*c*, *a'*S'*c'* de nos deux trièdres, puis faisons tourner de 180° autour du plan P, comme il a été dit plus haut, la région de E qui

contient l'un d'eux. La troisième arête Sb viendra s'appliquer sur sa correspondante S$'b'$, et le trièdre Sabc sera superposé au trièdre S$'a'b'c'$.

Par un pareil mouvement, s'il nous était possible de l'exécuter, nous arriverions à superposer les deux gants symétriques; c'est le résultat que nous obtenons en retournant l'un d'eux, grâce à l'ouverture qu'ils présentent. On verra plus loin (§ 31) que l'emploi de la quatrième dimension permettrait de faire ce retournement alors même qu'il n'y aurait pas d'ouverture.

Des impossibilités du même genre se présentent dans l'étendue et se résolvent au moyen du champ du cinquième degré, et ainsi de suite indéfiniment.

III. *Étant donnés deux systèmes identiques* S *et* S' *placés d'une manière quelconque dans l'étendue, on peut les amener en coïncidence par deux rotations simples successives.*

Pour le démontrer (1), prenons deux espaces homologues, A dans le système S et B' dans S'; désignons par $\alpha = \beta'$ le plan suivant lequel ils se coupent, la lettre α étant employée plus spécialement quand ce plan sera considéré dans A, la lettre β' quand il sera considéré dans B'. Soient β le plan de A qui est homologue de β', et α' le plan de B' qui est homologue de α.

Les deux plans α et β, étant dans un même espace A, ont pour intersection une droite $\alpha\beta$ (*fig.* 5), et, pour la même raison, les deux plans α' et β' ont pour intersection une droite $\alpha'\beta'$. Ce sont deux droites homologues situées dans le plan α. En faisant tourner la première d'un certain angle φ autour d'un certain point r de ce plan, on peut l'amener à coïncider avec la seconde. Menons par le point r le plan ρ absolument perpendiculaire au plan α; par une rotation simple et de même angle φ autour de ρ, le système S, devenant S_1, sera amené à avoir avec S' une droite commune $d = \alpha'\beta'$, qui sera homologue d'elle-même.

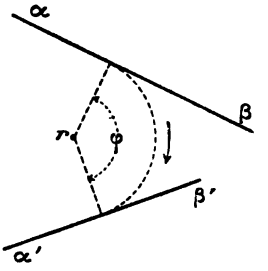
Ayant accompli cette rotation, prenons la droite d pour l'axe commun de deux faisceaux égaux de plans situés respectivement dans S_1 et S', et menons-lui un espace perpendiculaire E en un

(1) D'après VAN OSS : *The elementary motion of space* S_4 (*Mém. de l'Ac. d'Amsterdam;* séance du 21 novembre 1901).

quelconque de ses points. Cet espace, qui est son propre homologue, coupe les deux faisceaux de plans suivant deux faisceaux de droites qui, étant égaux et ayant même sommet, ont *un* rayon double d_1. Le plan dd_1 est donc un plan double, c'est-à-dire un plan qui, considéré dans l'un des deux systèmes, est lui-même son homologue dans l'autre. Une rotation simple de S_1 autour de ce plan amènera donc S_1 en coïncidence avec S'.

Dans l'étendue, le mouvement élémentaire le plus général peut donc être représenté par deux rotations successives autour de deux plans se coupant suivant un point. La réduction peut se

Fig. 5.



faire autour d'une infinité de couples de plans conjugués se coupant tous en un même point, qu'on peut appeler le *centre instantané de rotation*. Les couples de plans conjugués coupent un espace quelconque, ne passant pas par ce point, suivant des systèmes de droites qui sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. Parmi ces couples, il y en a un, et un seul, dont les deux plans sont absolument perpendiculaires entre eux; on en trouvera la construction géométrique dans le Mémoire cité de van Oss, et la théorie analytique dans celui de Cole (¹).

La *possibilité de mouvement,* la *liberté cinématique,* est plus grande dans le monde à quatre dimensions que dans le nôtre. Dans celui-ci, vous pouvez immobiliser un corps solide, que nous supposerons réduit à un point matériel, en le liant par des barres rigides à *trois* points fixes. Supprimez une première barre, vous donnez au corps un *premier degré de liberté :* il peut se

(¹) *On rotations in Space of four dimensions* (*Amer. Journ. of Math.*, t. XII, 1890).

déplacer et occuper un ∞^1 de positions qui sont sur une circonférence dans un plan perpendiculaire à la ligne des deux points fixes restants. Supprimez une deuxième barre, vous donnez un *deuxième degré de liberté :* le corps peut occuper maintenant un ∞^2 de positions qui sont sur une sphère ayant pour centre le point fixe restant. Supprimez enfin la troisième barre : le corps, *entièrement libre,* pourra se porter sur un quelconque des ∞^3 points de l'espace. Dans l'étendue, il faut *six* points fixes et autant de barres rigides pour immobiliser un corps.

IV. Nous aurons, dans le Chapitre VIII, à exécuter diverses opérations de rotation, entre autres *deux rotations successives autour de plans absolument perpendiculaires entre eux.* Alors le lecteur remarquera tout d'abord le fait de l'indépendance de deux pareilles rotations, qui donne aux constructions de la Géométrie descriptive à quatre dimensions une simplicité et une élégance inconnues de celle à trois. Puis il fera de lui-même cette seconde remarque que la rotation dans l'étendue ne diffère pas seulement de celle dans l'espace en ce qu'elle s'accomplit autour d'un plan au lieu de s'accomplir autour d'une droite, mais qu'il y a entre les deux choses une autre différence non moins essentielle.

Dans l'espace, une rotation nouvelle imprimée à un corps qui en possède, ou en a accompli déjà une *se combine* avec celle-ci ; le résultat est une rotation de même nature que chacune des deux composantes, et qui aurait pu être obtenue d'un seul coup : *la grandeur est à une dimension.* Dans l'étendue, les deux rotations demeurent indépendantes l'une de l'autre et ne peuvent pas être remplacées par une seule; leur résultat n'est pas homogène avec elles; il est à chacune d'elles ce qu'un rectangle est à chacun de ses côtés; on pourrait l'appeler « une rotation de rotation » : *la grandeur est à deux dimensions.*

De même que deux plans peuvent, à titre de cas particulier, avoir *une droite* pour intersection, de même deux rotations peuvent, au même titre, avoir *une résultante unique.* La condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient une pareille résultante est que les deux plans autour desquels elles s'accomplissent se trouvent précisément dans le cas particulier que nous venons de rappeler. S'ils se trouvent dans le cas général, c'est-à-dire ont *un*

point pour intersection, tout ce qu'on peut faire c'est de ramener les deux rotations à deux autres autour de plans absolument perpendiculaires entre eux; la réduction est toujours possible, mais d'une seule manière. Nous n'aurons affaire qu'à des rotations de ce genre.

On voit que la composition des rotations est tout autre dans la Géométrie à quatre dimensions et dans celle à trois. Dans la Géométrie *à n dimensions,* les choses se passent de même très différemment selon que n est un nombre pair 2μ, ou un nombre impair $2\mu + 1$. Dans le premier cas, la rotation a pour *axe* un champ de degré μ, et le mouvement général autour d'un point ne peut pas se réduire à quelque chose de plus simple que μ rotations perpendiculaires entre elles, dont quelques-unes peuvent être nulles. Dans le second cas, la rotation a encore pour *axe* un champ de degré μ, mais le mouvement autour d'un point peut se réduire généralement à une résultante unique, qui est une rotation autour d'une droite passant par ce point.

CHAPITRE V.

SYSTÈMES DE COORDONNÉES.

§ 16. — Les quatre espaces coordonnés.

L'existence de systèmes de coordonnées obliques ou rectangulaires, analogues dans leur constitution et leur emploi à ceux des Géométries à deux et à trois dimensions, résulte de ce qui précède.

Considérons *quatre* espaces distincts, c'est-à-dire dont les équations générales, telles qu'elles ont été données au § 1, ne soient ni indéterminées, ni incompatibles. Nous prenons leur point d'intersection O pour origine, et nous leur attribuons les équations

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0.$$

Ce seront *les quatre espaces coordonnés;* ils s'appellent respectivement, on verra pourquoi dans un instant, l'espace

$$\text{des } x_2x_3x_4, \quad \text{des } x_3x_4x_1, \quad \text{des } x_4x_1x_2, \quad \text{des } x_1x_2x_3.$$

Un point quelconque M de l'étendue pourra être défini au moyen d'un pareil système en vertu du théorème démontré au § 9 que *les segments interceptés sur des droites parallèles par deux espaces parallèles ont la même longueur.* Il résulte en effet de ce théorème que le lieu des points dont la distance à un espace, comptée suivant une direction donnée, a la même valeur, est un espace parallèle à l'espace fixe. Si donc on vous donne les distances respectives du point M aux quatre espaces coordonnés, chacune étant comptée parallèlement à l'intersection des trois autres espaces, vous pourrez par leur moyen construire quatre espaces parallèles aux premiers, et le point M sera leur intersection. Ces

quatre distances

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$$

sont *les coordonnées du point* M; elles sont contenues trois par trois dans un des espaces coordonnés : celui des $x_2x_3x_4$ pour x_2, x_3 et x_4, etc.

Les quatre espaces coordonnés se coupent trois à trois suivant quatre droites qui ont pour équations

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0 : \end{cases}$$

ces droites sont *les axes coordonnés,* et s'appellent respectivement l'axe

$$\text{des } x_1, \quad \text{des } x_2, \quad \text{des } x_3, \quad \text{des } x_4.$$

Enfin les espaces coordonnés se coupent deux à deux suivant six plans, qu'on peut aussi définir comme joignant les axes deux à deux, et qui ont pour équations

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Ce sont *les six plans coordonnés;* on les appelle, d'après celles des coordonnées qu'ils contiennent respectivement, le plan

des x_3x_4, des x_1x_4, des x_1x_2, des x_2x_3, des x_2x_4 et des x_1x_2 (1).

---

(1) Dans l'espace à trois dimensions, *six* plans passant par un même point ont pour intersections *quinze* lignes droites. Dans l'étendue, ce nombre se réduit à quatre, comme ceci.

Les associations de deux plans *où il n'y a pas d'indice répété*, au nombre de trois, savoir :

$$\begin{array}{llll} x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{et} & x_3 = 0, \quad x_4 = 0; \\ x_2 = 0, & x_3 = 0 & \text{et} & x_4 = 0, \quad x_1 = 0; \\ x_3 = 0, & x_1 = 0 & \text{et} & x_2 = 0, \quad x_4 = 0; \end{array}$$

donnent pour intersection *un point*. Les douze autres se rangent en quatre groupes de trois, tels que

$$\begin{array}{llll} x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{et} & x_1 = 0, \quad x_3 = 0; \\ x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{et} & x_2 = 0, \quad x_3 = 0; \\ x_1 = 0, & x_3 = 0 & \text{et} & x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \end{array}$$

où l'intersection est une seule et même droite $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; leurs douze lignes d'intersection se réduisent donc à quatre, chacune comptant pour trois; ce sont les quatre axes coordonnés.

Si l'on veut que le système soit *rectangulaire*, on n'a qu'à se référer à la construction qui a été donnée à la fin du paragraphe précédent. *Angle droit* dans la Géométrie à deux dimensions, *trièdre droit* dans celle à trois, le système rectangulaire est maintenant un *quadrièdre droit*. Nous y reviendrons au § 24.

La formule de la distance et la théorie que nous avons donnée de la perpendicularité supposent essentiellement que le système est rectangulaire ; la théorie des intersections et du parallélisme le suppose indifféremment rectangulaire ou oblique. Certaines questions se traiteront plus facilement avec celui-là, d'autres avec celui-ci ; mais, comme dans la géométrie à trois dimensions, passer d'une espèce à l'autre n'est qu'une affaire de calcul algébrique ; il en est de même, dans chaque espèce, pour opérer une *transformation de coordonnées*, c'est-à-dire changer l'orientation du système ou déplacer son origine. Nous n'aurons à faire usage que du système rectangulaire.

Nous pouvons maintenant reprendre la définition que nous avons laissée incomplète en commençant (§ 1), et dire : tandis que la géométrie à deux dimensions définit le point au moyen de deux coordonnées rapportées à un *système de deux droites se coupant*, et celle à trois au moyen de trois coordonnées rapportées à un *système de trois plans se coupant*, la géométrie à quatre dimensions le définit au moyen de quatre coordonnées rapportées à un *système de quatre espaces se coupant*.

Les quatre équations linéaires (1) entre les coordonnées, qu'alors nous avons substituées à ces coordonnées elles-mêmes pour la définition d'un point P, ne sont autre chose qu'un système de coordonnées plus générales, qui revient à l'emploi de quatre espaces quelconques A, B, C, D se coupant au point P, comme s'y coupent les quatre espaces respectivement parallèles à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Cette substitution nous a permis de faire une première étude des champs, de leurs intersections et de leurs perpendicularités sans prendre appui, comme on le fait dans l'exposé classique des géométries à deux et à trois dimensions, sur un système particulier de coordonnées dont l'emploi présuppose ces notions. On les possède quand on commence l'étude des deux premières géométries ; elles nous manquaient au

début de celle-ci. Mais il ne s'ensuit pas que l'édifice déjà construit, et qu'il ne reste plus qu'à disposer, repose sur le vide, car les méthodes que nous avons employées, les calculs que nous avons faits sont *indépendants du choix des axes*. L'existence de ceux-ci est la conséquence de la conception du point au moyen des équations (1).

§ 17. — Le point géométrique et le point analytique.

Cet édifice présente un cachet qui lui est commun avec toute la géométrie cartésienne, et qu'il importe de faire ressortir.

En vertu des équations (1) du § 1, que nous avons appelées les équations *du point*, il repose tout entier sur celui-ci : comme l'atome pour le chimiste, le point est l'unique élément de tous nos matériaux, l'un « une chimère des sens », l'autre « une abstraction de l'esprit » (SAISSET, *Introduction à la Philosophie de Spinosa*). Or ce point n'est pas la même chose que celui sur lequel la géométrie ordinaire est assise de son côté. Le second est un *être géométrique* nettement défini, savoir la limite d'un volume qui se rapetisse au delà de toute expression ; c'est une fraction de mètre cube aussi petite qu'on voudra, mais ce n'est jamais qu'une fraction de mètre cube. Le premier est un *être analytique*, constitué par les valeurs de quatre variables pouvant se rapporter à bien des choses ; sa nature est et demeure indéterminée. Quelle qu'elle soit, si les êtres qui en dépendent forment un ensemble continu tel que, sans exception, un d'eux corresponde toujours à des valeurs données de quatre variables, et qu'inversement un groupe déterminé de valeurs de celles-ci corresponde à un quelconque d'entre eux, cet ensemble sera analytiquement équivalent à l'*étendue*, ces valeurs seront les coordonnées de l'individu en question, et celui-ci pourra *s'appeler un point*. Que faut-il pour cela ? Que les individus soient indépendants les uns des autres, et que leur nombre soit le même que celui des points dans l'étendue.

On peut ainsi faire correspondre diverses choses, et cela de mille manières ; la suivante, assurément la plus simple et la plus naturelle, s'est présentée la première, et nous l'exposerons la première.

§ 18. — Loi de projectivité.

Un point, faisant partie d'une configuration quelconque X, est défini par ses quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4. Lions-leur d'autres variables y_1, y_2, y_3, y_4 par des relations qui attribuent à chacune de celles-ci une valeur unique et déterminée quand on donne aux x des valeurs déterminées. La forme la plus générale d'une pareille dépendance est

$$y_1 = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5}{e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_4x_4 + e_5},$$

$$y_2 = \frac{b_1x_1 + \dots}{e_1x_1 + \dots}, \qquad y_3 = \frac{c_1x_1 + \dots}{e_1x_1 + \dots}, \qquad y_4 = \frac{d_1x_1 + \dots}{e_1x_1 + \dots},$$

les seconds membres des deuxième, troisième et quatrième équations ne différant de celui de la première que par la substitution de la lettre b, ou c, ou d, à la lettre a.

Si l'on considère les nouvelles variables comme les coordonnées d'un point, le lieu de ces points sera une configuration Y dont les éléments

point, droite, plan, espace

correspondront un par un aux éléments de même nom de la configuration X. Et il y aura réciprocité, car, résolues par rapport aux x, les équations donnent à celles-ci des expressions de la même forme en fonction des y.

C'est cette correspondance qu'on a appelée de *projectivité*, ou d'*homographie*. Et l'on appelle *propriétés projectives des figures*, celles qui se conservent sans altération quand on effectue la substitution ci-dessus, laquelle n'est pas autre chose qu'un *changemant de coordonnées*.

La correspondance homographique peut être établie entre deux multiplicités de degré quelconque pourvu que ce soit le même, et entre deux multiplicités situées dans des champs quelconques, sous certaines conditions. En supprimant les lettres qui ont l'indice 4, puis successivement celles qui ont les indices 3 et 2, les équations ci-dessus se réduisent à trois, puis à deux, puis à une : ce sont les conditions de l'homographie pour les figures de

l'espace, du plan et de la droite; dans ce dernier cas l'équation prend la forme

$$ax_1x_2 + bx_2 + cx_1 + d = 0.$$

Voici un exemple de la correspondance dont il s'agit : prenons les équations (2), (3), (4) du § 1, qui représentent respectivement la droite, le plan et l'espace, et supprimons dans chacune *le terme constant*. Nous avons des droites, des plans et des espaces *passant par l'origine,* et il est facile de voir qu'alors les trois sortes d'éléments sont déterminés respectivement par 3, 4, 3 conditions. Ces nombres étant les mêmes que ceux de la deuxième ligne dans le Tableau du § 8, nous en concluons qu'il y a correspondance homographique entre les droites, les plans et les espaces passant par un point fixe de l'étendue et les points, les droites et les plans qui peuplent l'espace ordinaire. La Géométrie des premiers ne sera donc, *mutatis mutandis,* que la répétition de celle des seconds. Ainsi la condition pour que deux plans de l'étendue se coupent suivant une droite s'exprimera de la même manière que celle pour que deux droites de l'espace passent par un même point, etc.

Les équations de l'homographie contiennent 24 paramètres pour les figures de l'étendue, et ce nombre se réduit à 15, 8 et 3 pour celles des champs du troisième, du deuxième et du premier degré. En d'autres termes, la transformation homographique peut se faire, dans les quatre cas respectivement, de

$$\infty^{24}, \quad \infty^{15}, \quad \infty^{8} \quad \text{et} \quad \infty^{3}$$

manières.

Pour donner une application, nous démontrerons le résultat énoncé § 15 relativement au nombre des mouvements qui sont possibles pour un système dont un point O est fixé. Traçons, dans ce système, une hypersphère (§ 34) ayant pour centre le point O, et transformons-le homographiquement sous les deux conditions : 1° que la transformée de l'hypersphère soit une hypersphère identique; 2° que le centre O ne bouge pas. L'équation générale de l'hypersphère ayant quatorze paramètres, la première condition réduit de ∞^{24} à ∞^{10} le nombre des transformations, et la seconde réduit celui-ci à ∞^{6}. Tel est donc le nombre des manières dont la *rotation d'un système autour d'un point*

peut s'accomplir dans l'étendue, alors qu'il n'est que ∞^3 dans notre espace.

§ 19. — La loi de dualité.

L'espace, comme le point, est déterminé par quatre conditions, et il y a dans l'étendue le même nombre ∞^4 de l'une et de l'autre espèce. Il offre donc l'aptitude voulue pour être substitué au point en qualité d'être analytique fondamental, et devenir l'unique élément de tous les matériaux de la Géométrie.

Nous pouvons dès lors avoir devant les yeux, à volonté, deux sortes de champs : des *champs-de-points* C_p et des *champs-d'espaces* C_e. Nos discours se rapporteront indifféremment aux uns ou aux autres en supposant que les systèmes d'équations (1), (2), (3), (4) du § 1 représentent, dans un cas :

le point, la droite, le plan et l'espace,

ainsi qu'il a été admis dans les Chapitres précédents, et dans l'autre cas :

l'espace, le plan, la droite et le point.

Le dénombrement sera le même dans les deux cas (§ 8) :

$$\infty^4, \quad \infty^6, \quad \infty^6, \quad \infty^4.$$

C'est la *loi de dualité,* en vertu de laquelle un théorème sur des *lieux des points* est transformé en un théorème sur des *lieux de droites* dans la géométrie plane, sur des *lieux de plans* dans celle de l'espace, et des *lieux d'espaces* dans celle de l'étendue. Ces lieux transformés s'appellent des *enveloppes* et les coordonnées qui y conduisent directement s'appellent des *coordonnées tangentielles;* les figures qui ont entre elles cette correspondance sont dites *réciproques* ou *corrélatives.* Avec les coordonnées ponctuelles d'une part, et les coordonnées tangentielles d'autre part, on peut écrire deux traités parallèles, ne différant en apparence que par certaines substitutions de mots, en réalité roulant sur des objets et donnant des résultats qui n'auront généralement pas d'autre parenté que ce rapprochement matériel. C'est cette correspondance que M. Poincaré a si pittoresquement

exprimée avec son idée du *Dictionnaire,* qui s'applique à notre sujet quoiqu'elle en vise un autre :

« Construisons, dit-il, une sorte de dictionnaire en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent, dans les dictionnaires ordinaires, les mots de deux langues dont la signification est la même. Prenons ensuite les théorèmes de Lowatschewski et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. Nous obtiendrons ainsi les théorèmes de la géométrie euclidienne » (1).

L'intérêt serait évidemment médiocre si tout se réduisait à une pareille traduction; mais il appartient à la perspicacité du mathématicien que le champ nouveau dans lequel elle le transporte renferme lui-même des richesses exploitables.

La manière la plus simple d'exprimer analytiquement la loi de dualité paraît être celle-ci.

Nous avons admis jusqu'ici que, dans notre équation fondamentale du § 1,

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

les a, ou plutôt les rapports de quatre d'entre eux au cinquième, sont des constantes afférentes à un espace fixe, tandis que les x sont des grandeurs variables desquelles dépend la position d'un point, et l'équation exprime *que celui-ci est sur celui-là :* c'est l'équation de l'espace en coordonnées ordinaires. Admettons, au contraire, que les a sont des grandeurs variables desquelles dépend la position d'un espace et les x des constantes afférentes à un point fixe ; alors l'équation exprime *que celui-là passe par celui-ci :* ce sera l'équation du point en coordonnées tangentielles.

Dans cette théorie on a l'habitude, afin d'établir dans la forme la corrélation qui existe dans le fond (l'idée paraît simple et modeste, mais elle a eu d'importantes conséquences) : 1° de rem-

(1) *Revue générale des sciences pures et appliquées*, numéro du 15 décembre 1891.

placer les x par leurs rapports à une cinquième grandeur de même espèce, x_5; c'est ce qu'on appelle *rendre les coordonnées homogènes;* 2° de remplacer le symbole a par le symbole ξ, et, en général, de représenter deux grandeurs corrélatives par deux lettres corrélatives, une de l'alphabet latin, l'autre de l'alphabet grec. Notre équation fondamentale prend ainsi la forme

$$(1) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 + \xi_5 x_5 = 0 :$$

c'est, à volonté, l'équation de l'espace en coordonnées ordinaires, ou du point en coordonnées tangentielles.

Tel est le point de départ d'une théorie qui a pris tant de développement (1).

Dans la Géométrie à deux dimensions, le plan et la droite sont corrélatifs l'un de l'autre. Dans celle à trois, le plan et l'espace sont corrélatifs l'un de l'autre, et la droite est corrélative d'elle-même. Dans celle à quatre, le point et l'espace sont corrélatifs entre eux ; la droite et le plan, considérés comme des lieux de points ou des enveloppes d'espaces, le sont entre eux.

Les lois d'homographie et de dualité ont reçu la consécration d'un monument impérissable : la *Géométrie supérieure* de Chasles (2). Elles occupent une si haute situation dans la Science et le cours de nos déductions nous en faisait passer tellement près que nous avions le devoir de ne pas les passer sous silence. Nous les rencontrerons plus d'une fois ; mais, obligés par notre programme à passer d'un sujet à un autre sans en approfondir aucun, nous n'aurons pas à en faire un usage systématique.

Avec le principe de l'*Indétermination du point analytique,* qui les domine, elles forment la mine la plus riche qu'ait rencontrée la Géométrie moderne, et la plus exploitée. Voici ce que M. Moutard en disait déjà en 1864 (3) :

« La découverte des principes de la projection centrale marque incontestablement une époque importante dans l'histoire de la

(1) *Voyez* par exemple : GARBIERI, *Sui fascié e sulle schiere di superficie* (*Atti dell'Ist. Veneto*, 1886). — PAPELIER, *Leçons sur les coordonnées tangentielles,* 2 vol. in-8; Paris.

(2) *Traité de Géométrie supérieure,* 1re édition, 1852, 2e édition, 1880.

(3) Dans les Notes aux *Applications d'Analyse et de Géométrie* de PONCELET, t. I, p. 509.

Géométrie moderne. Les méthodes fondées sur ces principes possèdent un caractère à la fois intuitif et systématique, qui les rend également propres à découvrir de nouvelles propriétés des figures et à rattacher tout un ensemble de propositions à une même vérité générale. Par là, elles n'ont pas seulement agrandi et simplifié la science de l'étendue, mais, en donnant l'impulsion à l'étude des procédés généraux de transformation des figures, elles ont pour ainsi dire doté la Géométrie d'une puissance nouvelle. »

Plücker, dont le nom est connu de tous les mathématiciens, dont l'œuvre a contribué avec celles de Poncelet, de Chasles, de Grassmann et de Riemann, à aiguiller la Géométrie dans la direction qu'elle a aujourd'hui et à lui donner la puissance de l'Analyse, a créé une géométrie des plus intéressantes et des plus originales (1), affranchie de la condition d'égalité des degrés des champs que l'on fait correspondre. Elle prend *la droite* comme élément générateur de l'espace, faisant ainsi de celui-ci un *champ-de-droites* C_d, c'est-à-dire un être quadridimensionnel, puisque le nombre des droites y est ∞^4. Plus tard, Sophus Lie, Reye, Loria, Darboux (2), ont fait jouer à *la sphère* le même rôle dans les conditions les plus variées. C'est qu'en effet, comme on peut décrire un ∞^1 de sphères autour d'un point quelconque de l'espace pris pour centre, il y en a un ∞^4 pour l'espace entier; celui-ci peut donc être considéré comme un champ quadridimensionnel de sphères, comportant une géométrie analogue à celle de Plücker.

(1) PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.* Leipzig, in-8°, 1868-1869.

(2) SOPHUS LIE, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelncomplexe,* dans *Math. Annalen,* 1872; et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. LXXI, 1871, p. 597.

REYE, *Synthetische Geometrie der Kugeln,* 1879. — Une traduction italienne de cet Ouvrage, par Misani, a été publiée en 1881.

LORIA, *Ricerche intorno alla Geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito* (*Mémoires de Turin,* 1884).

DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal,* Paris, 1887-1896.

Voyez aussi : KLEIN, *Conférences sur les Mathématiques,* faites au Congrès de Chicago. Paris, 1898.

L'étendue elle-même a été traitée comme un champ d'hypersphères (¹).

§ 20. — Notre propre espace dans le système de coordonnées.

Après cette double digression, nous revenons à l'ordre d'idées du § 16 pour dire que rien ne nous empêche d'attaquer désormais les questions qui *ne sont pas indépendantes du choix des axes,* ni de faire tel usage qu'on voudra du système des *quatre espaces coordonnés,* rectangulaires ou obliques.

Nous en faisons une première application pour établir cette proposition que *tous les espaces sont pareils entre eux,* et que *tout espace est symétrique de lui-même par rapport à un quelconque de ses plans.* Quelle que soit l'équation d'un espace donné, et quel que soit le plan donné dans cet espace, on peut en effet, par un changement de coordonnées, ramener l'équation du premier à $x_4 = 0$, ce qui démontre la première partie de la proposition, et les équations du second à $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, d'où il est aisé de conclure la seconde partie.

Ces propriétés sont déjà connues pour le plan relativement à ses droites et pour la droite relativement à ses points. On les énonce encore en disant qu'une droite est coupée en deux moitiés égales par un quelconque de ses points, un plan par une quelconque de ses droites, un espace par un quelconque de ses plans, l'étendue par un quelconque de ses espaces. La considération des *demi-droites,* des *demi-plans* et des *demi-espaces* va être utile dans l'étude des angles.

Nous admettrons toujours que *notre espace* est l'un des quatre espaces coordonnés, et nous lui attribuerons l'équation

$$x_4 = 0;$$

il contiendra les deux plans et les trois axes coordonnés dans les équations desquels se trouve l'équation $x_4 = 0$; il contiendra aussi toutes les figures représentées par deux, trois ou quatre

(¹) GIACOMINI, *Sulla corrispondenza fra la Geometria conforme di* S_4 *e la geometria projettiva dello spazio ordinario* (*Annales de l'École Normale supérieure de Pise,* 1899).

équations parmi lesquelles se trouve $x_4 = 0$ explicitement ou implicitement. L'axe restant s'appelle l'*axe de la quatrième dimension;* toute direction faisant avec lui, en coordonnées rectangulaires, un angle différent de 90°, est du domaine de la quatrième dimension.

Comme il importe que le système de coordonnées soit bien compris, nous allons le présenter d'une autre manière, en prenant la suite des idées dans l'ordre inverse et substituant la forme concrète à la forme analytique.

Dans *notre espace,* que nous appellerons aussi l'*espace des*

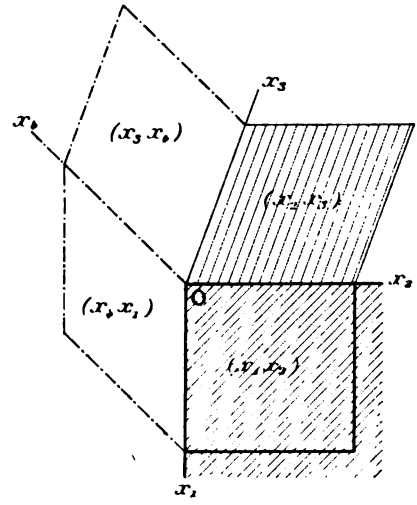


Fig. 6. — Le Système de coordonnées.

LÉGENDE DE LA FIGURE. — $(x_1 x_2)$, le plan horizontal ; Ox_1 et Ox_2, deux droites de ce plan perpendiculaires entre elles. — $(x_1 x_3)$ et $(x_2 x_3)$, deux autres plans menés par ces deux droites perpendiculairement au premier, et déterminant par leur intersection le troisième axe Ox_3. — $(x_1 x_2 x_3)$, l'espace des trois plans, ou *notre espace.* — $(x_1 x_2 x_4)$, $(x_1 x_3 x_4)$ et $(x_2 x_3 x_4)$, trois autres espaces menés par ces trois plans perpendiculairement au premier, et déterminant par leur intersection le quatrième axe Ox_4. — $(x_3 x_4)$ et $(x_1 x_4)$, deux plans *absolument perpendiculaires,* respectivement, aux plans $(x_1 x_2)$ et $(x_2 x_3)$ et les coupant suivant *le point* O ; ils sont *simplement perpendiculaires* entre eux et se coupent suivant la *droite* Ox_4.

x_1 x_2 x_3, et par un point O, concevez trois lignes perpendiculaires entre elles Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; la première sera, par exemple, l'horizontale qui se dirige vers vous, la seconde celle qui va de votre gauche à votre droite, et la troisième la verticale qui pointe vers

le haut. Vous pouvez prendre une feuille de dessin posée sur une table horizontale pour *le plan des* $x_1\,x_2$ et y tracer les deux premières, mais non la troisième, car elle n'a qu'un point dans ce plan, le point O. Celle-ci détermine avec celles-là deux autres plans, celui des $x_2\,x_3$ et celui des $x_3\,x_1$, qui, perpendiculaires entre eux et à $x_1\,x_2$, forment avec lui le système de coordonnées. Rabattez le premier sur la feuille en le faisant tourner autour de l'intersection commune Ox_2. Si vous vouliez figurer *en plan* le système $x_1\,x_2\,x_3$, vous n'auriez qu'à rabattre de même le second en le faisant tourner autour de sa ligne de terre Ox_1 ; mais laissons ce deuxième rabattement à la Géométrie à trois dimensions : notre affaire est un peu moins simple.

Menez maintenant par le point O la perpendiculaire Ox_4 à l'espace $x_1\,x_2\,x_3$. Elle n'y a pas d'autre point, et elle détermine, avec chacun des plans $x_1\,x_2$, $x_2\,x_3$, $x_3\,x_1$ trois autres espaces qui sont perpendiculaires entre eux et au premier, et forment avec lui le système des quatre espaces coordonnés

$$x_1\,x_2\,x_3\,; \qquad x_4\,x_1\,x_2, \quad x_4\,x_2\,x_3, \quad x_4\,x_3\,x_1.$$

Elle détermine en outre, avec chacun des axes x_1, x_2, x_3, trois autres plans qui sont perpendiculaires à l'espace $x_1\,x_2\,x_3$ et forment avec les trois premiers les six plans coordonnés

$$x_1\,x_2, \quad x_1\,x_3, \quad x_2\,x_3\,; \qquad x_4\,x_1, \quad x_4\,x_2, \quad x_4\,x_3.$$

Nous négligerons le cinquième comme nous avons négligé le second et nous emploierons comme ceci les deux autres plans nouveaux, qui sont le quatrième et le sixième : 1° Dans l'espace que le plan $x_4\,x_1$ détermine avec le plan $x_1\,x_2$, rabattez-le sur celui-ci en le faisant tourner autour de l'intersection commune Ox_1. 2° Dans l'espace que le plan $x_4\,x_3$ détermine avec le plan $x_3\,x_2$, faites tourner le premier, comme une porte, autour de l'intersection commune Ox_3 jusqu'à ce qu'il coïncide avec le second, puis supposez qu'il l'accompagne dans le rabattement autour de Ox_2 décrit dans l'alinéa précédent ; il s'appliquera avec lui sur la feuille $x_1\,x_2$.

Le système est alors représenté sur cette feuille. Il est vrai que deux de ses plans, $x_1\,x_3$ et $x_2\,x_4$, sont laissés de côté ; mais les quatre autres suffisent pour sa détermination, et ils sont appli-

qués sur elle. Ils le sont avec les figures qu'ils contiennent; vous pouvez dessiner sur chacun d'eux telles autres figures qu'il vous plaira; puis vous aurez les unes et les autres dans leur vraie position en rétablissant par les moyens inverses des précédents les trois plans autres que $x_1\, x_2$, un dans notre espace comme celui-ci, les deux autres dehors.

Sous les noms A, B, C, D, ces quatre plans superposés reparaîtront dans le § 24, où le sens des rotations, négligé ici, sera précisé; à partir de là ils ne cesseront guère de jouer un rôle important.

CHAPITRE VI.

LES ANGLES.

§ 21. — Dièdres d'espaces.

Nous ne voulons pas aborder la *Tétragonométrie*, qui est assez compliquée, mais seulement définir la notion d'*angle*, sur laquelle elle repose. D'ailleurs, nous ne nous arrêterons pas sur les cas :

De deux droites,
D'une droite et d'un plan,
De deux plans se coupant suivant une droite,
D'une droite et d'un espace,
D'un plan et d'un espace;

les trois premiers se présentent à peu près de la même manière que dans la Géométrie à trois dimensions; dans les deux derniers, l'angle n'est autre chose que celui de la droite ou du plan avec la droite ou le plan qui en est la projection sur l'espace considéré (§ 14, IV).

Il ne reste donc à traiter que les cas :

De deux espaces,
De deux plans qui se coupent suivant un point;

nous verrons d'abord le premier; le second est une question difficile, qui ne pourra venir qu'au § 26 à la suite de plusieurs autres.

Soient A et B les deux espaces donnés. Rapportons-les à un système de coordonnées rectangulaires en prenant le premier pour l'espace des $x_2 x_3 x_4$, leur plan d'intersection pour le plan

des $x_3 x_4$. L'espace A aura pour équation

$$x_1 = 0,$$

et l'espace B, comptant parmi les espaces générateurs du plan $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, aura une équation de la forme

$$x_1 + \lambda x_2 = 0.$$

En posant $\lambda = -\cot\varphi$, ces équations prennent la forme

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - x_1 \operatorname{tang}\varphi = 0; \end{cases}$$

on y voit un paramètre, et un seul, qui est un angle φ. M. Jordan a démontré, mais nous ne reproduirons pas sa démonstration, faite pour la Géométrie à un nombre quelconque de dimensions, que les *carrés* des lignes trigonométriques de cet angle ne sont altérés par aucun changement de coordonnées, celles-ci demeurant rectangulaires. C'est ce qu'on appelle des *invariants du système* (1). Les lignes trigonométriques elles-mêmes ne sont pas des invariants, car on peut changer *leur signe* à volonté en changeant celui d'une des coordonnées.

Tous les systèmes de deux espaces ne sont pas pareils entre eux, comme le sont tous les espaces entre eux; mais ils ne diffèrent les uns des autres que par l'élément caractéristique φ, qui s'appelle *leur angle*. Deux systèmes de deux espaces sont *identiques* si cet élément a la même valeur, et *différents* dans le cas contraire.

L'angle de deux espaces comprend quatre parties opposées deux à deux, de part et d'autre du plan d'intersection. Ce sont quatre *dièdres d'espaces* ayant pour *arête* ce plan, et pour *faces* les demi-espaces qui en partent. L'un d'eux est le maximum et l'autre le minimum de l'angle qu'une droite quelconque menée dans un des demi-espaces fait avec une droite quelconque menée dans un des trois autres.

Si l'on prend sur l'un des deux espaces un point quelconque m, qu'on en abaisse sur le second une perpendiculaire $mp = x_2$, que

(1) On peut consulter sur les Invariants : ANDOYER, *Leçons sur la théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure*. Paris, 1900.

du pied p de celle-ci on abaisse une deuxième perpendiculaire $pq = x_1$ sur le plan-arête, le rapport

$$\frac{mp}{pq} = \frac{x_2}{x_1}$$

est *la tangente de l'angle des deux espaces.* C'est la même construction que pour deux plans et pour deux droites, et il en résulte la solution du problème suivant :

Étant donné un demi-espace A *limité par un plan* P, on demande de *trouver un autre demi-espace faisant avec le premier un dièdre de valeur donnée* φ. On mènera par un point q du plan P un plan Q perpendiculaire à ce plan et coupant le demi-espace A suivant une droite qp; par un point p de celle-ci on élèvera une perpendiculaire sur A de longueur pm telle que l'on ait $pm = pq \operatorname{tang} \varphi$; l'espace demandé sera celui passant par le plan P et le point m.

§ 22. — Les trois formes classiques de l'équation d'un espace.

Considérons un espace A placé d'une manière quelconque. Menons-lui par l'origine O une perpendiculaire dont soient P le pied et d la longueur. Soient en outre

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4$$

les *cosinus des angles* que cette perpendiculaire fait avec les axes des

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

égaux aux dièdres que l'espace A fait avec les espaces coordonnés correspondants.

Pour un point quelconque M de l'espace A, la ligne MP est perpendiculaire à OP; par suite, d est la projection du contour $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, et l'on a

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = d :$$

c'est ce qu'on appelle l'*équation aux cosinus.* Pour l'identifier avec notre *première* équation, l'équation (4) du § 1, il faut observer que tous les α sont compris entre -1 et $+1$, et commencer

par mettre dans la même condition les coefficients de cette équation. Pour cela, il n'y a qu'à la diviser par $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}$; en désignant le radical par r, on peut alors poser

$$\alpha_1=\frac{a_1}{r}, \qquad \alpha_2=\frac{a_2}{r}, \qquad \alpha_3=\frac{a_3}{r}, \qquad \alpha_4=\frac{a_4}{r}; \qquad d=-\frac{a_0}{r},$$

et l'on voit qu'il y a entre les cosinus la relation

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1.$$

Mentionnons enfin, pour mémoire, la *troisième* forme classique, celle *des segments à l'origine*, savoir :

$$\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\frac{x_3}{p_3}+\frac{x_4}{p_4}=1,$$

où p_1, p_2, p_3, p_4 sont les longueurs comprises sur chaque axe entre l'origine et le point où il est coupé par l'espace A.

§ 23. — Les trièdres.

Le *trièdre ordinaire* est la figure formée par trois demi-droites x_1, x_2, x_3 (§ 20) issues d'un même point O et non situées dans un même plan. Il est tout entier dans *un* espace, que déterminent ses trois arêtes.

On appelle *trièdre de seconde espèce* la figure formée par trois demi-plans X_1, X_2, X_3 issus d'une même droite d et non situés dans un même espace; la droite d s'appelle l'*axe du trièdre;* les portions des plans X_1, X_2, X_3 limitées par leurs intersections deux à deux sont les *faces à deux dimensions du trièdre;* nous les désignerons par A_1, A_2, A_3; les dièdres qu'elles forment sont les *faces à trois dimensions du trièdre* et se désignent par A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; enfin les dièdres d'espaces que forment les espaces que ceux-ci déterminent deux à deux sont les *faces à quatre dimensions du trièdre* et se désignent par $\widehat{A_1A_2A_3}$, $\widehat{A_2A_3A_1}$, $\widehat{A_3A_1A_2}$. Le trièdre lui-même se désigne par $A_1A_2A_3$. Chaque face plane a pour *opposée* la face à trois dimensions déterminée par les autres. La somme des angles des faces à deux dimensions est moindre que quatre angles droits. Celle des angles dièdres des faces à trois dimensions est plus grande que deux, et moindre que six angles droits.

Il ne faudrait pas considérer la définition du trièdre de seconde espèce comme faite à plaisir. Elle correspond à celle du cône de seconde espèce qu'on verra plus loin, et elles ne sont l'une et l'autre que le commencement d'un épanouissement qui se continue dans les champs de degré supérieur en se compliquant de plus en plus.

§ 24. — Le quadrièdre droit.

Quatre espaces ont pour intersections :

Un point (§ 1), généralement unique et déterminé, et nous admettrons ici que tel est le cas;

Des plans, dont le nombre est $\frac{4.3}{1.2} = 6$;

Des droites, dont le nombre est $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$, par chacune desquelles il passe trois plans.

Cet ensemble est le *quadrièdre à quatre dimensions,* appelé aussi *tétraédroïde,* mot dont nous ne ferons pas usage parce que nous visons surtout le *quadrièdre droit,* qui ne peut exister dans un espace et par suite ne peut pas donner lieu à confusion avec le quadrièdre ordinaire. On a déjà vu, § 16, que notre système de coordonnées rectangulaires n'est autre chose qu'un quadrièdre droit; aussi importe-t-il de bien connaître celui-ci et nous ajouterons quelques mots à ce qui en a été déjà dit.

Il se compose :

Des quatre droites ou *arêtes,* qui sont les axes coordonnés

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4;$$

Des *six faces planes,* ou *faces à deux dimensions*

$$x_1x_2, \quad x_2x_3, \quad x_3x_4, \quad x_4x_1; \quad x_1x_3, \quad x_2x_4,$$

sur lesquelles nous reviendrons dans le paragraphe suivant;

Des *quatre faces à trois dimensions,* qui sont les *quatre espaces coordonnés,* dont chacun est perpendiculairé à l'arête et aux plans qu'il ne contient pas;

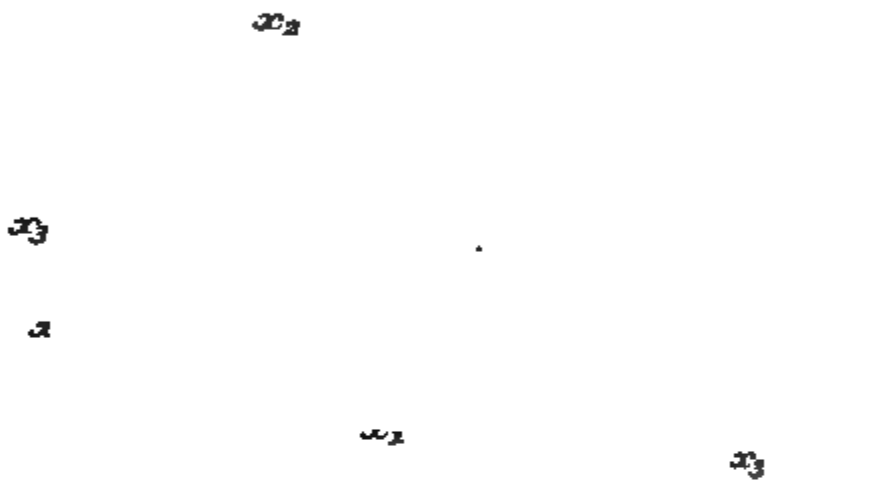
Enfin de *quatre trièdres de seconde espèce,* dont chacun a pour axe une arête et pour faces les plans allant de cette arête à

chacune des trois autres; comme pour les faces planes diagonales x_1x_2 et x_3x_4, il n'y a guère lieu de s'en occuper en ce qui concerne le système de coordonnées.

On se fera une idée du quadrièdre droit par la construction suivante.

Formons d'abord un *trièdre ordinaire droit*. Si, sur une table, nous réunissons trois triangles rectangles par les sommets de leur angle droit O, ils laissent entre eux des interstices (dont la somme est égale à un *droit*) qu'on ne peut faire disparaître qu'en

Fig. 7.



sortant la figure du plan; alors les deux côtés qui portent la lettre x affectée du même indice, s'appliquent aisément l'un sur l'autre et deviennent les trois arêtes du trièdre droit.

Prenons maintenant quatre de ces trièdres droits I, II, III, IV et réunissons leurs sommets en un point O : ils laissent aussi entre eux des interstices qu'il est impossible de faire disparaître. Mais si nous marquons leurs arêtes et leurs faces comme ceci

I.....	x_1,	x_1x_2,	x_2,	x_2x_1,	x_3,	x_3x_1;
II.....	x_2,	x_2x_3,	x_1,	x_1x_2,	x_4,	x_4x_2;
III	x_3,	x_3x_4,	x_2,	x_2x_3,	x_1,	x_1x_3;
IV	x_4,	x_4x_1,	x_3,	x_3x_4,	x_2,	x_2x_4,

et si nous supposons mobiles leurs espaces respectifs (§ 15), il sera facile d'appliquer l'une sur l'autre, deux par deux, les faces qui ont la même marque, et trois par trois les arêtes qui sont dans le même cas. Le quadrièdre droit sera construit; on peut dire, dans le sens ainsi défini, que *toutes ses faces sont doubles et toutes ses arêtes, triples.*

Dans la géométrie à deux dimensions, les *deux* axes coordonnés partagent le *plan* en

$$2^2 = 4$$

angles droits, dont les figures limitantes (côtés) sont *deux droites ;* en appelant 1, 2, 2, 4 les quatre demi-axes $\pm x_1$, $\pm x_2$ et désignant un angle par ses deux côtés, ces angles droits sont

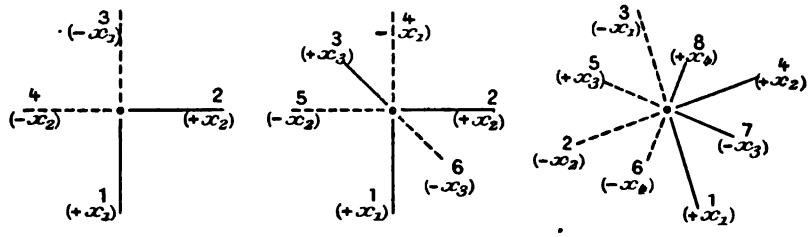
$$12, \quad 23, \quad 34, \quad 41.$$

Dans la géométrie à trois dimensions, les *trois* plans coordonnés partagent *l'espace* en

$$2^3 = 8$$

trièdres droits, dont les figures limitantes sont *trois angles droits ;*

Fig. 8.



en appelant 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six demi-axes $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$ et désignant un trièdre par ses trois arêtes, ces trièdres droits sont

$$123, \quad 234, \quad 345, \quad 456, \quad 561, \quad 612, \quad 135, \quad 246.$$

Les angles droits limitants sont, pour le premier, 12, 23, 31, et de même pour les autres.

Dans la géométrie à quatre dimensions, les *quatre* espaces coordonnés partagent *l'étendue* en

$$2^4 = 16$$

quadrièdres droits, dont les figures limitantes sont *quatre trièdres droits.* En appelant

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8$$

les huit demi-axes

$$+x_1, \quad +x_2, \quad -x_1, \quad -x_2, \quad +x_3, \quad +x_4, \quad -x_3, \quad -x_4,$$

et désignant un quadrièdre par ses quatre arêtes, ces quadrièdres droits sont

1256, 1267, 1278, 1285,
2356, 2367, 2378, 2385,
3456, 3467, 3478, 3485,
4156, 4167, 4178, 4185.

Les trièdres limitants et les faces sont, pour le premier,

125, 126, 156, 256,
12, 25, 56, 61, 15, 26,

et de même pour les autres. Nous retrouverons ces groupes de chiffres dans les §§ 41 et 44, où ils désigneront, non plus des lignes, mais des points.

Le quadrièdre droit construit ci-dessus ne constitue qu'une seule des seize régions qu'on vient de définir : il en faut juxtaposer à celui-là quinze autres pareils pour remplir toute l'étendue autour du point O et avoir le *quadrièdre droit complet.*

On voit ainsi qu'il y a *seize points différents ayant les mêmes coordonnées en valeur absolue, et différenciés par les seize combinaisons de signes + ou — affectant ces valeurs.*

Les seize quadrièdres se divisent en huit couples. Deux d'un même couple ont un trièdre commun dans l'espace $x_4 = 0$, c'est-à-dire le nôtre; cela fait dans cet espace huit trièdres, lesquels forment ensemble le système de coordonnées des $x_1 x_2 x_3$, qui est celui de la Géométrie à trois dimensions. Semblablement pour chacun des trois autres espaces.

§ 25. — La Géométrie descriptive à quatre dimensions.

I. Nous avons vu que le système de coordonnées comporte trois sortes d'éléments : *des espaces,* au nombre de quatre; *des plans,* au nombre de six; *des axes,* au nombre de quatre. Jusqu'ici nous avons considéré surtout les premiers ou les troisièmes; considérons maintenant ceux de la seconde catégorie.

Les plans coordonnés se peuvent associer par deux de deux manières : 1° il y a trois couples de *plans opposés,* n'ayant en commun que l'origine et *absolument perpendiculaires* l'un à

l'autre :

$$x_1x_2 \text{ et } x_3x_4, \quad x_1x_3 \text{ et } x_2x_4, \quad x_2x_3 \text{ et } x_4x_1;$$

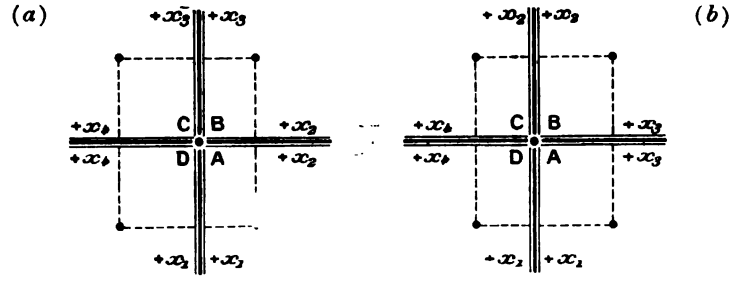
2° il y a douze couples de *plans adjacents, simplement perpendiculaires* l'un à l'autre et se coupant suivant une droite, qui est un des axes coordonnés ; tels sont, par exemple,

$$x_1x_2 \text{ et } x_1x_3, \quad x_1x_2 \text{ et } x_2x_3, \quad \ldots, \quad \text{etc.}$$

Dans le premier cas, les quatre indices sont différents; dans le second, il y en a un de répété.

D'autre part, nous avons défini, § 14, la *projection* d'un point sur un plan, laquelle est un autre point, unique et déterminé.

Fig. 9.



Un point de l'étendue, x_1, x_2, x_3, x_4 est déterminé par ses projections *sur deux plans opposés* x_1x_2 et x_3x_4, car elles ont pour coordonnées dans leur plan respectif, l'une x_1 et x_2 par rapport aux axes x_1, x_2, l'autre x_3 et x_4 par rapport aux axes x_3, x_4. *Un objet quelconque de l'étendue peut donc être déterminé et représenté par les projections de ses différents points sur ces deux plans.*

Par la considération suivante, nous réunissons les deux projections sur une seule et même feuille de dessin.

Supposons, comme toujours, que l'espace $x_1x_2x_3$ est le nôtre, et, en outre, que le plan x_1x_2 est celui de la feuille sur laquelle ces lignes sont imprimées, les axes x_1, x_2 ayant leur direction positive dans l'angle droit inférieur A (*fig.* 9, *a*). Faisons tourner l'espace $x_2x_3x_4$ de 90° autour du plan x_2x_3, qui est son intersection avec le nôtre. Le plan x_3x_4 tournera aussi de 90° autour de l'origine (§ 15), les axes x_3 et x_4 qu'il contient venant s'appli-

quer respectivement sur les axes x_3 et x_2; ce plan sera ainsi venu dans notre espace, où il se trouve placé perpendiculairement suivant Ox_3 à notre feuille. Rabattons-le sur celle-ci en le faisant tourner autour de Ox_3 de la droite vers la gauche; il s'appliquera par les directions positives de ses axes Ox_3 et Ox_4 dans l'angle supérieur C.

Rien ne nous empêche de faire une opération analogue pour le couple conjugué x_2x_3 et x_4x_1, et de rabattre ses deux plans dans les deux autres angles B et D. En définitive les quatre plans

$$x_1x_2, \quad x_2x_3, \quad x_3x_4, \quad x_4x_1$$

sont rabattus respectivement, par les directions positives de leurs axes, dans les angles

A, ou inférieur droit;
B, ou supérieur droit;
C, ou supérieur gauche;
D, ou inférieur gauche,

de la feuille de dessin.

La *fig. b* représente la construction afférente aux couples x_1x_3 et x_2x_4, et l'on pourrait faire une troisième figure afférente aux couples x_2x_3 et x_4x_1; mais nous ferons exclusivement usage du système que représente la *fig. a*. Voici, pour lui, comment le rabattement applique les quatre régions des plans coordonnés sur les quatre régions de la feuille de dessin, les unes et les autres étant désignées par les deux signes qu'elles imposent aux coordonnées.

FEUILLE DE DESSIN.		PLANS COORDONNÉS			
		x_1x_3	x_2x_3	x_3x_4	x_4x_1
ANGLE	inférieur droit	+ +	− +	− −	− −
	supérieur droit	+ −	+ +	− +	− −
	supérieur gauche	− −	+ −	− +	− +
	inférieur gauche	− +	− −	+ −	+ +

II. Il est clair que la réunion de deux figures opposées, telles que A et C, ne saurait *représenter pour notre esprit* quelque chose

de concret, puisque, ramenées dans leur position réelle, elles se trouvent dans des espaces différents. Mais il n'en est pas de même pour la réunion de deux figures adjacentes telles que A et B, x_1x_2 et x_2x_3. Ramenées à leur position relative réelle, celles-ci sont dans le même espace et y sont dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre, dont l'axe qui les sépare sur le dessin est l'intersection. C'est dès lors de la *Géométrie descriptive ordinaire;* les deux figures déterminent un espace $x_1x_2x_3$, ou AB, et représentent ensemble une figure à trois dimensions située dans cet espace; cette figure n'est autre chose que *la projection sur cet espace de la configuration formée dans l'étendue par l'ensemble des points considérés.*

Deux projections *opposées* A et C déterminent complètement la figure de l'étendue, et, avec elle, toutes les choses qui en dépendent; par exemple, on peut en déduire les figures B et D rien qu'en menant des parallèles aux axes par les points correspondants. Deux projections *adjacentes* A et B ne déterminent que la projection de la figure de l'étendue sur un certain espace AB; mais il va de soi que la réunion des projections sur deux espaces différents, tels que AB et DC de la figure 9, déterminerait aussi le corps à quatre dimensions.

Remarquons qu'il ne s'agit en tout cela que de *détermination géométrique.* De nouveau, nous mettons le lecteur en garde contre l'espérance qu'il pourrait concevoir d'obtenir, par le moyen des projections spatiales elles-mêmes, la vision d'un corps à quatre dimensions. Nous pouvons bien construire dans notre espace, en fil de fer, en plâtre ou en carton, une figure identique à ce que serait la projection du corps sur un espace placé dans l'étendue d'une manière quelconque par rapport à lui. Nous pouvons avoir autant de figures de ce genre que nous voudrons, et le Chapitre VIII en montrera plusieurs exemples.

Mais, ce que nous ne pouvons pas faire, c'est de *coordonner deux projections* en mettant dans leur vraie position relative les deux espaces (ou les deux plans absolument perpendiculaires entre eux) sur lesquels elles ont été faites. Une seule projection d'un corps à quatre dimensions sur un espace a même bien moins de *valeur figurative* pour nous que n'en a une seule projection d'un corps à trois dimensions sur un plan, parce que,

notre œil étant dans le même espace que la première, nous nous trouvons vis-à-vis d'elle dans les conditions où nous serions vis-à-vis de la seconde si nous la regardions en mettant notre œil dans son plan.

III. En vue des applications qui se présenteront au Chapitre VIII, nous devons ajouter les remarques suivantes :

1° On a vu, § 15, que deux positions d'un même corps dans l'étendue peuvent être ramenées l'une à l'autre par deux rotations successives autour de deux plans absolument perpendiculaires entre eux.

Réciproquement, si un corps est déplacé dans l'étendue de telle sorte que les deux projections d'un quelconque de ses points sur deux plans A, C absolument perpendiculaires entre eux décrivent chacune un cercle, et que les centres de ces deux cercles soient les mêmes pour tous les points du corps, le mouvement de celui-ci est une double rotation autour d'un couple de plans parallèles aux plans A, C. Les angles de rotation étant φ dans le premier et φ' dans le second, il y aura entre les coordonnées x et y, au commencement et à la fin du mouvement, les relations connues

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, \\ y_2 = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3 = x_3 \cos\varphi' - x_4 \sin\varphi', \\ y_4 = x_3 \sin\varphi' - x_4 \cos\varphi'. \end{cases}$$

2° Si l'un des angles φ, φ' est égal à zéro, c'est-à-dire si rien ne bouge dans un des plans de projection, tandis que dans l'autre plan tous les points décrivent des cercles concentriques, le mouvement du corps est une rotation autour d'un plan parallèle au premier plan de projection.

3° On ne perdra pas de vue la différence essentielle qu'il y a entre les sens du mot *projection sur un plan,* dans la Géométrie à trois et dans celle à quatre dimensions. Dans la première, tous les points situés sur une même droite perpendiculaire au plan de projection ont pour projection un seul et même point; dans la seconde, ce sont tous les points situés dans un même plan absolument perpendiculaire au plan de projection. Dans la première, un point du plan de projection peut donc représenter, non seulement un point, mais encore *des points* en nombre quelconque situés sur une même droite, laquelle est perpendiculaire au plan

de projection; dans la seconde, le même point peut représenter, non seulement un point, mais encore *des points et des droites* en nombre quelconque situés dans un même plan, lequel est absolument perpendiculaire au plan de projection.

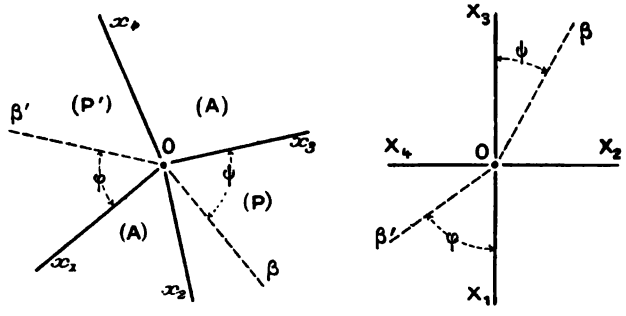
4° Lorsqu'un espace est perpendiculaire au plan de projection, tous les points et toutes les figures qu'il contient se projettent sur une même droite. On verra, dans les figures du Chapitre VIII, de nombreux exemples de ce cas et du précédent.

§ 26. — Angles de deux plans.

On sait qu'un *dièdre de plans* se ramène à un angle de droites en le coupant par un plan perpendiculaire à son arête. Sans en dire davantage sur ce cas, nous allons chercher la relation qui correspond à celle-là pour le cas où les deux plans donnés, A et B, se coupent *suivant un point* O et, dès lors, *ne forment pas de dièdre.*

Nous rapporterons nos deux plans au quadrièdre droit du § 24

Fig. 10.



en supposant que le plan A soit celui des $x_1 x_2$. Pour édifier ce système de coordonnées, menons par le point O :

1° Dans le plan A, une première droite Ox_1, ce qui peut se faire de ∞ manières;

2° Un plan P′ passant par Ox_1 et perpendiculaire à A, qui sera le plan des $x_1 x_4$: cette opération peut encore se faire de ∞ manières (§ 14);

3° Enfin un plan P perpendiculaire à P′ suivant le premier

mode et un plan A′ perpendiculaire de même à A; chacun d'eux est unique; le premier, qui coupe A suivant une ligne Ox_2 perpendiculaire à Ox_1, sera le plan des $x_2 x_3$ et le second sera celui des $x_3 x_4$.

Comme on le voit, la construction est *doublement indéterminée.* Cette double indétermination sera levée plus loin en faisant intervenir à son tour le plan B. Pour un instant, nous prenons un quelconque des ∞^2 systèmes qui s'offrent à nous, et nous simplifierons le plus possible les équations du plan B en le définissant par deux espaces générateurs dont l'un soit en même temps un des espaces générateurs du plan des $x_2 x_3$, l'autre un des espaces générateurs de celui des $x_4 x_1$. Ses équations sont alors

$$\begin{cases} x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_4 + \mu x_1 = 0. \end{cases}$$

Si nous cherchons l'intersection du plan ainsi défini avec A ou avec A′, nous trouvons

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

c'est-à-dire *un point unique* : l'origine des coordonnées. Remarquons d'ailleurs qu'en partant d'un plan donné A, notre construction peut atteindre et reproduire un plan quelconque B coupant A au point O; car le nombre de ces plans est ∞^4, et le nombre ∞^3 des systèmes que nous avions déjà a été porté à ∞^4 par l'arrivée des deux paramètres λ, μ.

En posant

$$\lambda = -\cot\varphi, \qquad \mu = -\cot\psi,$$

nos équations du plan B prennent la forme

$$\begin{cases} x_2 - x_3 \operatorname{tang}\varphi = 0, \\ x_4 - x_1 \operatorname{tang}\psi = 0, \end{cases}$$

contenant deux angles dont il importe que la signification géométrique soit bien comprise.

Ce sont des *dièdres d'espaces,* savoir : φ des espaces

$$x_2 \text{ et } x_2 = x_3 \operatorname{tang}\varphi, \qquad \text{ou} \qquad \text{A′P′ et BP′},$$

ψ des espaces

$$x_4 = 0, \text{ et } x_4 = x_1 \operatorname{tang}\varphi, \qquad \text{ou} \qquad \text{AP et BP};$$

P′ est l'arête du premier dièdre, P celle du second, A′ et B les faces du premier, A et B celles du second. Cette définition serait aussi claire que naturelle pour les géomètres à quatre dimensions; nous avons, nous, plus de facilité à considérer des angles de droites que des dièdres d'espaces. Heureusement la substitution est facile.

Il est clair, en effet, que la trace du plan B sur celui des $x_4 x_1$ a pour équation, rapportée à ces deux axes,

$$x_4 - x_1 \operatorname{tang} \psi = 0,$$

et que celle sur le plan des $x_2 x_3$ a pour équation

$$x_2 - x_3 \operatorname{tang} \varphi = 0.$$

Donc φ est l'angle que font ensemble les traces $0\beta'$ et $0x_1$ des plans B et A sur le plan P′, et ψ est celui que font ensemble leurs traces 0β et $0x_3$ sur le plan P.

Nous devons maintenant serrer la question de plus près en faisant intervenir le plan B.

Supposons que la droite $0x_4$ tourne dans le plan A autour du point 0 et décrive ce plan tout entier pour revenir à sa position de départ. Soit $0x_1$ une position quelconque. Elle est dans un même espace avec le plan B, puisqu'elle a un point commun avec lui. Nous pouvons donc la projeter orthogonalement sur ce plan comme le fait la géométrie à trois dimensions; soit $0y_1$ cette projection qui est unique et déterminée.

Projetons de la même manière $0y_1$ sur le plan A et soit $0\xi_1$ cette deuxième projection. A chacune des ∞ lignes $0x_1$, il correspondra une ligne $0\xi_1$ unique et déterminée; les deux multiplicités sont donc en relation homographique (§ 18): ce sont deux faisceaux qui sont dans un même plan A et y ont leurs sommets l'un sur l'autre.

On sait (1) que, quand deux faisceaux homographiques ont le même sommet, il y a deux *rayons doubles*, c'est-à-dire dont chacun, considéré comme appartenant à l'un des deux faisceaux, est son propre correspondant dans l'autre. Appelons-les, dans notre cas, $0a_1$ et $0a_2$; appelons en outre $0b_1$ et $0b_2$ leurs projections sur

(1) CHASLES, *Géométrie supérieure*, Chap. VIII (p. 115 de la 2e édition).

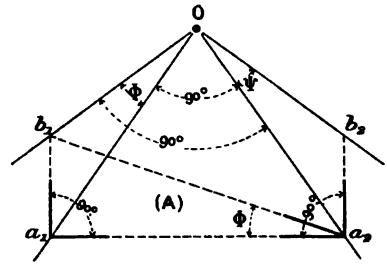
le plan B, qui sont les positions correspondantes de la droite $0y_1$; en d'autres termes, remplaçons, dans la figure de la page 71, x_1, x_2, β et β' par a_1, a_2, b_1, b_2.

Si nous considérons le trièdre $0b_1a_1a_2$, rectangle le long de l'arête a_1, nous avons

$$\cos \widehat{b\,a_2} = \cos \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{b\,a_1} ;$$

mais les deux droites $0b_1$ et $0a_2$ sont perpendiculaires entre elles parce qu'elles sont dans deux plans absolument perpendiculaires $a_1 0 b_1$ et $a_2 0 b_2$ (§ 14, III) ; on a donc $\widehat{b_1 a_2} = 90°$ et par suite aussi $\widehat{a_1 a_2} = 90°$, donc le trièdre est isoscèle birectangle et *nos deux*

Fig. 11.



rayons doubles sont perpendiculaires entre eux. Nous pouvons prendre indifféremment, pour figurer l'angle, soit l'angle plan $b_1 0 a_1$, soit l'angle dièdre $b_1 a_2 a_1$.

Nous voici parvenus au terme de cette longue étape :

1° Chacune des droites $0a_1$, $0a_2$, d'une part, $0b_1$, $0b_2$ d'autre part, est la projection orthogonale de l'autre, et ainsi s'établit entre les deux plans A, B la réciprocité qui est une des choses que nous cherchions.

2° Notre quadrièdre droit avait été construit avec une droite $0x_1$ et avec un plan $P' = x_1 x_4$ indéterminés l'un et l'autre : c'est la droite $0a_1$ qu'il faut prendre pour $0x_1$ et le plan $a_1 0 b_1$ pour P'.

Alors nous aurons deux angles Φ et Ψ *déterminés en position et en grandeur ;* ils jouiront de la propriété *d'invariance,* qui est une autre chose que nous cherchions, et qu'il est impossible de réaliser avec un paramètre unique. Ce sont ces deux angles qui

caractérisent un système de deux plans se coupant suivant un point comme le caractérise la section droite du dièdre quand ils se coupent suivant une droite, et comme le dièdre d'espaces caractérise un système de deux espaces; c'est d'eux qu'il faut dire que *deux systèmes de deux plans sont identiques quand ils y sont les mêmes et différents dans le cas contraire.*

On les appelle *les angles des deux plans.*

Les quatre droites (*fig.* 11)

$$Oa_1,\quad Oa_2,\quad Ob_1,\quad Ob_2$$

forment un quadrièdre qui est compris entre les deux plans et qu'il est commode de considérer quand il s'agit de leur inclinaison. Ses quatre dièdres sont droits, ce qui serait impossible dans l'espace ordinaire; de ses quatre faces, deux sont des angles droits et sont, l'une dans le plan A, l'autre dans le plan B; les deux autres sont chacune dans un plan qui est perpendiculaire à la fois à A et à B, et sont, l'une l'angle Φ, l'autre l'angle Ψ.

Ces deux angles jouissent de diverses propriétés dont voici les principales:

1° Si l'on considère le dièdre formé par un espace générateur quelconque du plan A avec un espace générateur quelconque du plan B, ce dièdre demeure compris entre un maximum et un minimum qui ne sont autre chose que nos deux angles.

2° Menons par le point O une droite b dans le plan B et une autre droite a dans le plan A. On sait que si la droite b demeure immobile et que la droite a exécute une rotation complète dans le plan A, l'angle ba ne descend pas au-dessous d'un minimum m qu'on appelle *l'angle de la droite et du plan*. Supposons que la droite b exécute à son tour une rotation complète dans le plan B; l'angle m variera sans descendre au-dessous d'un *minimum* qui est précisément un des deux angles Φ, Ψ, et sans s'élever au-dessus d'un *maximum* qui est l'autre.

Partant de cette propriété, prise comme évidente *a priori* ou démontrée par des considérations faciles, on peut en faire la définition des angles Φ, Ψ et le point de départ de la théorie; c'est ainsi que procède M. Schoute.

3° Si, du point O comme centre, on trace un cercle dans le plan B, la projection (*voir* § 14) de ce cercle sur le plan A est une

ellipse dont Oa_1 et Oa_2 sont les deux axes; un cercle tracé dans le plan A avec le centre O se projette de même sur B suivant une ellipse dont Ob_1 et Ob_2 sont les deux axes (¹).

Un point resterait à élucider pour achever la question. Nous l'avons ramenée aux rayons doubles de deux faisceaux homographiques superposés; or ces rayons doubles peuvent être réels ou imaginaires, et il nous incomberait d'établir que c'est toujours le premier cas dans la question actuelle. Nous laisserons ce point de côté, nous contentant d'avoir mis dans son jour le singulier mode de relation qui se présente ici, et qui n'a rien d'analogue dans les deux premières géométries. Au fond, les angles de deux plans dépendent d'une équation du second degré; quelle que soit la grandeur auxiliaire qn'on leur substituera, on ne pourra esquiver, ni ce fait, ni les calculs plus ou moins compliqués qui en sont la conséquence si l'on veut traiter la question complètement.

Les auteurs italiens l'ont résolue en prenant appui sur un être qui semble au premier abord n'avoir guère de relation avec elle: *la sphère imaginaire infiniment éloignée dans l'étendue* (*voir* plus loin, § 34).

§ 27. — Plans d'angles égaux.

Les deux angles Φ, Ψ sont indépendants l'un de l'autre et peuvent avoir chacun toutes les valeurs possibles. S'ils sont nuls tous les deux, c'est que les deux plans sont parallèles suivant le deuxième mode. Si l'un d'eux est nul sans que l'autre le soit, ou les deux plans se coupent suivant une droite, ou ils sont parallèles suivant le premier mode. Si l'un d'eux est droit, les deux plans sont *simplement perpendiculaires* entre eux, et s'ils sont droits

---

(¹) La question des angles de deux plans est difficile et n'a pas été étudiée par beaucoup d'auteurs. Citons:

HOPPE, *Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionalen Geometrie* (*Arch. der Math. und Phys.*, t. LXVIII, 1882).

SCHOUTE, *Les angles quadridimensionaux de deux plans* (*Nieuw Archief*, 2ᵉ série, t. III, p. 111-116).

VERONÈSE, *Fondamenti di Geometria*, Padoue, 1891. — Ce dernier auteur traite la question par les droites riemanniennes que les deux plans ont dans l'espace de l'infini, les angles des deux plans correspondant aux *deux plus courtes distances* de ces droites.

tous les deux, les deux plans sont *absolument perpendiculaires* entre eux.

Enfin ils peuvent être *égaux*. Ils ne sauraient le devenir par le fait de la rotation qu'en commençant ce paragraphe nous avons donnée au système de coordonnées, s'ils sont inégaux à un moment quelconque de cette rotation; mais ils le demeurent tout le temps s'ils sont égaux à un moment quelconque. Alors il n'y a plus ni maximum ni minimum; les angles ne sont plus au nombre de deux, mais sont en nombre infini et l'on dit des deux plans qu'ils sont *plans d'angles égaux*, ou *plans à une infinité d'angles*. Le cas correspond à celui, en géométrie plane, de deux faisceaux homographiques superposés ayant plus de deux rayons doubles.

CHAPITRE VII.

LES ÊTRES DE LA GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

§ 28. — Les lignes, les surfaces et les hypersurfaces.

Le premier livre de la Géométrie analytique à trois dimensions a pour titre : *La ligne droite et le plan.* Ce qui précède est un résumé succinct de ce qu'est le livre correspondant de la Géométrie analytique à quatre dimensions, intitulé : *La ligne droite, le plan et l'espace.* Si nous voulions continuer cette exposition, il nous faudrait reprendre les équations (2), (3) et (4) du début, et les discuter en supposant maintenant que A, B, C sont des fonctions de degré supérieur des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

Alors le système (2), formé de trois équations, représente *une ligne,* le système (3), formé de deux équations, représente une *surface,* et l'équation unique (4) représente une *hypersurface.* Ces dénominations demandent à être expliquées par quelques considérations d'ordre géométrique.

Quand le point, qui est l'être géométrique primordial, se déplace dans l'étendue d'une manière continue, il engendre une *ligne,* — on dit aussi *une courbe.* Quand une ligne se déplace dans l'étendue de telle sorte que, si l'on considère deux positions *successives,* à un point de la première il corresponde un point de la seconde et réciproquement, elle engendre une *surface.* Quand une surface se déplace dans l'étendue sous la même condition, elle engendre une *hypersurface.* La ligne ou la surface mobile s'appelle la *génératrice,* et la ligne formée par une suite de points correspondants s'appelle la *directrice.*

En résumé, la ligne est un lieu géométrique de points; la surface, un lieu géométrique de lignes, et l'hypersurface un lieu

géométrique de surfaces. La première est à *une* dimension, la seconde à *deux*, la troisième à *trois*.

1° *Les lignes.*

Une ligne peut être tout entière dans un même plan, ou tout entière dans un même espace, ou, ce qui est le cas général, traverser successivement une infinité d'espaces différents; on dit, suivant chacun de ces trois cas, qu'elle est *à simple, à double* ou *à triple courbure*. Le serpent enroulé par terre est une ligne à simple courbure; quand il lève en l'air une partie seulement de son corps, c'est une ligne à double courbure; mais il ne peut pas nous donner, et nous ne pouvons pas voir, d'aucune autre manière, la ligne à triple courbure.

Dans celle-ci, deux points consécutifs déterminent une droite qui s'appelle *la tangente;* trois points consécutifs, un plan qui s'appelle le *plan osculateur;* quatre points consécutifs, un espace qui s'appelle l'*espace hyperosculateur*.

En chaque point, il y a :

— Un ∞^2 de droites perpendiculaires à la tangente (§ 14); elles s'appellent les *normales* et sont dans un espace appelé l'*espace normal;* il y en a une, et une seule, dans le plan osculateur : c'est la *normale principale;*

— Un ∞^1 de droites perpendiculaires au plan osculateur (§ 14); on les appelle les *binormales;* il y en a une, et une seule, dans l'espace hyperosculateur : c'est la *binormale principale;*

— Une seule droite perpendiculaire à l'espace hyperosculateur; elle s'appelle la *trinormale,* parce qu'elle est perpendiculaire à trois tangentes consécutives;

— Un ∞^1 de plans normaux, tous situés dans l'espace normal; il y en a un, et un seul, dans l'espace hyperosculateur; il s'appelle le *plan normal principal.*

La normale et la binormale principales sont à la fois dans l'espace normal et dans l'espace hyperosculateur.

La tangente, la normale principale, la binormale principale et la trinormale, en un point donné de la ligne, constituent *ses directions principales;* elles forment un quadrièdre droit.

On prend le rapport de l'angle de deux tangentes consécutives,

deux plans osculateurs consécutifs, deux espaces hyperosculateurs consécutifs, à l'arc infiniment petit compris entre leurs points de contact, comme mesure de la première, de la deuxième, de la troisième courbures. C'est, en quelque sorte, la rapidité avec laquelle la forme de la courbe s'éloigne de la forme rectiligne, à simple courbure, à double courbure (1).

La ligne est coupée par un espace en un ou plusieurs points. On dit qu'elle est de degré m quand le nombre de ces points est m; alors, une au moins des quatre coordonnées figure au moins une fois avec l'exposant m dans une au moins de ses trois équations.

2° *Les surfaces.*

La surface est coupée par un espace suivant une ligne et par un plan suivant un ou plusieurs points. On dit qu'elle est du degré m quand, dans le second cas, le nombre de ces points est m.

La théorie des surfaces dans l'étendue a été peu étudiée parce qu'elle présente beaucoup d'analogies avec ce qui se voit dans l'espace à trois dimensions. Elle fait l'objet d'une dissertation publiée en 1897 (2), à Tubingue.

3° *Les hypersurfaces.*

L'hypersurface est coupée par un espace suivant une surface, par un plan suivant une ligne, par une ligne suivant un ou plusieurs points. On dit qu'elle est de degré m quand, dans le troisième cas, le nombre des points est m. Alors, une au moins des quatre coordonnées figure au moins une fois dans son équation avec l'exposant m.

On verra, dans les paragraphes ci-après, 31 à 35, quelques hypersurfaces particulières.

---

(1) *Voir,* pour la théorie analytique des trois courbures : PIRONDINI, *Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattre dimensioni.* (*Giorn. di Battaglini,* 1890).

(2) KOMMERELL, *Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raume von vier Dimensionen,* in-8°, 53 pages, Tubingue.

Voyez aussi : SERVANT, *Sur une extension des formules de Gauss* (*Bull. Soc. Math.,* t. XXX, fasc. II, 1902).

§ 29. — L'hypervolume.

L'extension de la notion de volume se fait comme il suit. Les intégrales double, triple et quadruple, prises entre des limites déterminées, des différentielles

$$x_2 dx_1, \quad x_3 dx_1 dx_2, \quad x_4 dx_1 dx_2 dx_3$$

représentent respectivement :

Dans la Géométrie à deux dimensions, l'*aire* comprise entre deux droites parallèles à l'axe des x_2, et les segments qu'elles interceptent d'une part sur l'axe des x_1, d'autre part sur une courbe donnée;

Dans celle à trois, le *volume* compris entre quatre plans parallèles, deux à $x_1 = 0$, deux à $x_2 = 0$, et les intersections de ces plans, d'une part avec le plan $x_3 = 0$, d'autre part avec une surface donnée ;

Dans celle à quatre, l'*hypervolume* compris entre six espaces parallèles, deux à $x_1 = 0$, deux à $x_2 = 0$, deux à $x_3 = 0$, et les intersections de ces espaces, d'une part avec $x_4 = 0$, d'autre part avec une hypersurface donnée.

Notre pensée ne peut pas *voir* la dernière figure, mais elle peut néanmoins se rendre compte comme il suit de sa constitution. Supposons, pour simplifier : 1° que l'hypersurface est tout simplement un espace parallèle à $x_4 = 0$; 2° que l'un des espaces de chacun des trois couples d'espaces parallèles est un des trois autres espaces coordonnés. En d'autres termes, il s'agit de la portion d'étendue comprise entre les espaces

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \quad \text{et} \quad x_1 = a, \\ x_2 &= 0 \quad \text{et} \quad x_2 = b, \\ x_3 &= 0 \quad \text{et} \quad x_3 = c, \\ x_4 &= 0 \quad \text{et} \quad x_4 = d, \end{aligned}$$

a, b, c, d étant quatre longueurs déterminées. C'est le *parallélépipède à quatre dimensions, droit* si les axes sont rectangulaires, *oblique* s'ils ne le sont pas.

L'espace $x_4 = 0$ et son parallèle $x_4 = a$ sont coupés chacun suivant des couples de plans parallèles par les trois autres couples,

ce qui y forme un parallélépipède. Il en est de même pour chacun des autres couples d'espaces, d'où il suit que l'hypercorps en question est limité par huit *parallélépipèdes*. Quatre de ceux-ci, situés un dans chaque espace coordonné, ont un sommet commun sur l'origine des coordonnées. Il y a en tout seize sommets semblables, en chacun desquels se réunissent quatre parallélépipèdes limitants. 32 *arêtes* vont d'un sommet à l'autre. Enfin chaque face d'un des huit parallélépipèdes lui est commune avec un des sept autres, et ces 48 faces n'en font ainsi que 24 de l'hypercorps. Un cas particulier de cette figure fera l'objet du § 41, sous le nom d'*octaédroïde*.

Telle est la constitution géométrique des êtres *à quatre dimensions*, seuls doués de l'existence réelle si un champ concret du quatrième degré englobe le nôtre, sans être englobé lui-même dans des champs supérieurs.

Naturellement, l'unité à laquelle il faut rapporter l'hypervolume est *le mètre élevé à la quatrième puissance*. Quant aux hypersurfaces, leur unité est le *mètre cube*, et elles sont homogènes avec les solides à trois dimensions. Ainsi les choses qui sont désignées par les mots *aire*, *volume* et *hypervolume*, et qui ont pour mesures des multiples ou sous-multiples de

$$1^{m^2}, \quad 1^{m^3}, \quad 1^{m^4},$$

sont des *contenus* dans les géométries à 2, 3 et 4 dimensions, et des *contenants* dans celles à 3, 4 et 5.

§ 30. — Quadriques et quartiques.

Jetons un rapide coup d'œil sur les êtres que représentent les trois systèmes

$$(4) \qquad A = 0,$$

$$(3) \qquad A = 0, \quad B = 0,$$

$$(2) \qquad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

du § 1, quand les polynomes A, B, C sont du *second degré :* nous sommes en présence des *quadriques* si nous avons pris la première ligne, des *quartiques* si nous avons pris la seconde.

L'équation $A = 0$ représente la *quadrique à trois dimensions*

ou l'*hypersurface du second degré*. Elle contient quatorze paramètres; par conséquent, il passe une quadrique par quatorze points pris arbitrairement, et l'étendue en contient un ∞^{14}.

Quand ce n'est pas un cône, l'équation peut être ramenée à la forme si connue avec deux termes dans la Géométrie du plan, et avec trois dans celle de l'espace :

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}+\frac{x_4^2}{d^2}=1.$$

Étant donnée une relation de dualité entre deux configurations (§ 19), la quadrique peut être définie comme le lieu des points de l'une qui sont dans les espaces correspondants de l'autre.

La quadrique contient un ∞^3 de droites. Il passe un ∞ de ces droites en chaque point m de la quadrique ; elles forment un cône ordinaire du second degré, et l'espace contenant ce cône est l'*espace tangent au point m*. Chaque point a son espace tangent.

Un plan est dit *tangent à la quadrique* en un point m quand il la coupe suivant deux droites passant par ce point.

Si, en chaque point d'une droite d de la quadrique, on mène l'espace qui est tangent à celle-ci, le nombre de ces espaces est ∞^1 et ils forment un faisceau (§ 8). Le plan, axe de ce faisceau, est tangent à la quadrique en tous les points de la droite d, c'est-à-dire la coupe suivant cette droite d comptée deux fois; on l'appelle le plan *hypertangent*. Il passe un plan hypertangent par chaque droite de la quadrique; par suite, leur nombre est ∞^3. Le lieu des plans hypertangents passant par un point donné est un hypercône de première espèce (*voy.* § 34).

Le système (3), auquel nous avons déjà appliqué la dénomination de *quartique,* représente l'intersection de deux quadriques. C'est un lieu du second degré, homogène avec ceux que la Géométrie à trois dimensions étudie sous ce nom, mais autre et plus général : il s'en distingue au même titre que la courbe, intersection de deux surfaces du second degré, se distingue de la courbe plane appelée *conique*.

L'équation

$$A+\lambda B=0$$

représente un *faisceau de quadriques* passant par la quartique (3);

parmi ces quadriques, il y en a cinq qui sont des hypercônes de première espèce (§ 34).

Enfin le système (4) représente l'intersection de trois quadriques. C'est une *ligne du second degré,* généralement à triple courbure,

A notre connaissance, les travaux les plus importants sur les hyperquadriques et les hyperquartiques sont, pour les premières, un Mémoire de M. Sègre, publié dans le *Recueil de l'Académie de Turin*, et, pour les secondes, un Mémoire de M. Bordiga, publié dans les *Actes de l'Institut de Venise* (1). Nous y renvoyons le lecteur. Mais, afin de le laisser encore un peu dans la compagnie de cet être singulier, l'hypersurface, qu'ignorent les Géométries à deux et à trois dimensions, nous en étudierons sommairement les deux formes les plus simples après celle du premier degré : l'hypersphère et l'hypercône. Ce sont des *quadriques particularisées,* mais la *particularisation* est plus profonde dans la seconde que dans la première.

La *sphère* de la Géométrie ordinaire est une *quartique particularisée :* l'intersection de deux quadriques dont l'une est une hypersphère et dont l'autre est *dégénérée en un espace.*

§ 31. — L'hypersphère.

L'équation, en coordonnées rectangulaires,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - R^2 = 0$$

représente un lieu dont tous les points sont à égale distance de l'origine; on l'appelle l'*hypersphère*. Les espaces la coupent suivant des *surfaces sphériques*. Considérons, par exemple, l'espace $x_4 = 0$ et déplaçons-le parallèlement à lui-même, c'est-à-dire substituons à cette première valeur de la coordonnée des valeurs progressivement croissantes. Au début, la section est une surface sphérique de rayon R; elle va en décroissant progressivement jusqu'à la position $x_4 = R$, pour laquelle elle se réduit à un

(1) SEGRE, *Studio sulle quadriche in un spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (*Mem. de Turin* (2), p. 36, 1884).
BORDIGA, *Studio generale della quartica normale* (*Atti dell'Ist. ven.*, 1886).

point. Au delà, la section devient une *sphère imaginaire*, jusqu'à ce que notre espace sécant devienne *celui de l'infini*.

Pour cette dernière position, la sphère dont il s'agit est la même pour toutes les hypersphères de l'étendue et s'appelle la *sphère imaginaire infiniment éloignée*. Elle a été très employée par la brillante école italienne (1), qui la désigne habituellement par J_2; on la voit apparaître dans la question de l'angle de deux plans (§ 26).

Tous les plans A absolument perpendiculaires à un plan donné B (§ 17) sont complètement parallèles entre eux, c'est-à-dire vont couper l'espace de l'infini suivant une même droite a; de même tous les plans B absolument perpendiculaires aux plans A passent par une même droite b de l'infini. *Ces deux droites a et b sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à la sphère* J_2.

Deux sphères, qui sont un cas particulier de deux quartiques, n'ont en commun, si elles n'appartiennent pas à un même espace ou à une même hypersphère, que *quatre points*, deux à distance finie, réels ou imaginaires suivant la distance des centres, et deux sur la sphère J_2.

Un plan coupe l'hypersphère suivant une *circonférence* qui est maximum si le plan passe par le centre. Dans ce cas, la tangente à la circonférence est dite aussi *tangente à l'hypersphère*. Le lieu de toutes les tangentes en un point donné est un espace qui est perpendiculaire au rayon aboutissant à ce point, et s'appelle *l'espace tangent*. L'hypersphère est tout entière du même côté de cet espace. Tous les plans situés dans celui-ci sont tangents à l'hypersphère.

Cinq points donnés, non situés dans un même espace, déterminent l'hypersphère.

Deux hypersphères qui ont un point commun non situé sur la ligne des centres se coupent suivant une surface sphérique dont le centre est sur cette ligne et dont l'espace lui est perpendiculaire.

Quatre hypersphères qui n'ont en commun, ni une surface

(1) *Voyez*, par exemple, GIACOMINI, *Sulla corrispondenza fra la Geometria conforme di* S_4 *e la Geometria proiettiva dello spazio ordinario* (*Annali della Sc. norm. sup. di Pisa*, 1899).

sphérique, ni une circonférence, et qui n'ont pas un espace tangent commun en un même point, se coupent en *deux points* symétriques par rapport à l'espace des quatre centres, ou en deux points coïncidents, ou ne se coupent pas. Dans le second cas, elles ont une tangente commune perpendiculaire à l'espace des centres.

Mentionnons ici un curieux résultat concernant la sphère et signalé par M. Newcomb, de Baltimore (1) : c'est encore un exemple, pouvant être rapproché de ceux donnés § 15, des différences profondes que présenteraient les conditions de l'existence dans les troisième et quatrième champs.

Soient, dans notre espace $x_4 = 0$, deux sphères concentriques, l'extérieure de rayon R

$$(1) \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2, \qquad y_4 = 0.$$

et l'intérieure de rayon r

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, \qquad x_4 = 0,$$

et soit $e = R - r$ l'épaisseur de la couche comprise entre elles. Supposons que, sans toucher à la première, on sorte la seconde de notre espace en faisant marcher son centre sur l'axe des x_4 d'une longueur quelconque ζ, et qu'en même temps on fasse varier son rayon r de la quantité ρ; ses équations seront alors

$$(3) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (r+\rho)^2, \qquad x_4 = \zeta.$$

La distance d'un point y_1, y_2, y_3, 0, de la sphère R à un point x_1, x_2, x_3, x_4 de la sphère $r + \rho$ a pour carré

$$(4) \qquad (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + x_4^2,$$

et son *minimum*, obtenu en différentiant les équations (3) et (4), sera la *nouvelle épaisseur* ε au point y_1, y_2, y_3. La différentiation donne

$$(y_1 - x_1)\,dx_1 + (y_2 - x_2)\,dx_2 + (y_3 - x_3)\,dx_3 = 0,$$
$$x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3 = 0,$$

(1) *Note on a class of transformations which surfaces may undergo in space of more than three dimensions* (*Am. Journ. of Math.*, 1878).

d'où, avec une variable auxiliaire λ,

$$x_1 = \lambda y_1, \qquad x_2 = \lambda y_2, \qquad x_3 = \lambda y_3.$$

En substituant ces valeurs dans (4), nous avons

$$\varepsilon^2 = (\lambda - 1)^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \zeta^2 = (\lambda - 1)^2 R^2 + \zeta^2,$$

et, en posant

$$\zeta = e \sin \theta, \qquad \lambda = 1 + \frac{e}{R} \cos \theta, \tag{5}$$

il vient

$$\varepsilon^2 = e^2.$$

Donc, si la sphère r se déplace d'une manière continue à partir du point O, l'épaisseur de la couche *demeurera invariable* à la condition que ζ et λ soient déterminés à chaque instant comme l'indiquent les équations (5), en fonction d'un angle auxiliaire θ qui est l'*angle de position* de la ligne allant d'un point quelconque de la sphère immobile R au point correspondant de la sphère mobile $r + \rho$. Pendant un pareil mouvement, la couche considérée n'éprouve d'autre déformation que celle inhérente à la flexion qui se fait sur la surface extérieure, et qui peut être diminuée autant que l'on voudra en diminuant l'épaisseur e.

Quand θ arrive à 180°, nous avons les valeurs

$$\zeta = 0, \qquad \lambda = 1 + \frac{e}{R}, \qquad r + \rho = \lambda R = R + e,$$

dont la première veut dire que la sphère mobile est *revenue dans notre espace,* et la dernière qu'elle est *devenue extérieure à* R, l'épaisseur étant toujours demeurée la même. En un mot, la couche a été *retournée* sans déchirure et sans aucune déformation permanente, chaque point de la surface intérieure ayant décrit un angle de 180° autour du point correspondant de la surface extérieure.

§ 32. — L'hypersphère (suite). — Pôles et polaires.

Par un plan P, extérieur à l'hypersphère H, on peut mener deux espaces E_1, E_2 tangents à celle-ci et pas davantage. Soient a_1 et a_2 leurs points de contact.

Menons un espace E passant par le centre O. Il coupera : l'hypersphère suivant une sphère maxima S; le plan P suivant une droite D, et les deux espaces E_1, E_2 suivant deux plans tangents à la sphère en a_1, a_2. On sait que la droite D et la droite ab sont conjuguées harmoniques par rapport à la sphère S (1), c'est-à-dire passent par deux points conjugués, sont perpendiculaires au rayon sur lequel se trouvent ces deux points, et sont perpendiculaires entre elles. Donc, toutes les droites du plan P sont conjuguées avec ab; on dit que cette droite et ce plan sont conjugués entre eux par rapport à l'hypersphère H.

A ce théorème il correspond celui-ci, en vertu de la loi de dualité (§ 19). Par une droite D, extérieure à l'hypersphère H, on peut mener à celle-ci un ∞ d'espaces tangents E; leurs points de contact sont sur un cercle dont le plan P est conjugué avec D.

Une figure quelconque a pour correspondante une autre figure, qui est sa conjuguée, ou sa polaire (ces deux termes sont à peu près synonymes), par rapport à une hypersphère donnée H (plus généralement, si l'on veut, à une quelconque des quadriques non spécialisées). Aux

points, droites, plans et espaces

de la première, il correspond des

espaces, plans, droites et points

de la seconde.

§ 33. — L'hypersphère (suite); contenu et contenant.

Il est facile de trouver le *contenu* de l'hypersphère en faisant pour elle comme la géométrie de l'espace fait pour la surface sphérique. Rapportée à trois axes rectangulaires, celle-ci a pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2;$$

sa section par un plan à la hauteur x_3 est un cercle dont le rayon a pour carré $R^2 - x_3^2$ et dont la surface est $\pi(R^2 - x_3^2)$; une

(1) *Voyez*, par exemple, CATALAN, *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, p. 273.

tranche d'épaisseur dx_3 ayant ce cercle pour base a pour volume $\pi(R^2 - x_3^2)\,dx_3$, et il faut intégrer cette différentielle de $-R$ à $+R$, ou, après l'avoir doublée, de o à $+R$. En posant $x_3 = R\sin\theta$, la seconde forme devient

$$2\pi R^3 \cos^3\theta\, d\theta,$$

les limites étant maintenant o et $\frac{\pi}{2}$; on trouve aisément que l'intégrale est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

De même:

L'équation de l'hypersphère étant celle donnée plus haut, sa section par un espace situé à la hauteur x_4 est une sphère dont le rayon a pour carré $R^2 - x_4^2$ et dont le volume est $\frac{4}{3}\pi(R^2 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}$; une tranche d'épaisseur dx_4 ayant cette sphère pour base a pour hypervolume $\frac{4}{3}\pi(R^2 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}\,dx_4$, qu'il faut intégrer de $-R$ à $+R$, ou doubler et intégrer alors de o à $+R$. En posant $x_4 = R\sin\theta$, cette seconde forme devient

$$\frac{8}{3}\pi R^4 \cos^4\theta\, d\theta,$$

les limites étant maintenant o et $\frac{\pi}{2}$; on trouve aisément que l'ingrale est

$$\frac{1}{2}\pi^2 R^4.$$

Ce qu'on peut appeler *la surface* ou *le contenant* de l'hypersphère se trouve de même en opérant comme pour la circonférence du cercle et pour la surface de la sphère: c'est l'intégrale triple de

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx_4}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{dx_3}\right)^2}\; dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

En posant

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\alpha, \\ x_2 = R\sin\alpha\cos\beta, \\ x_3 = R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma, \\ x_4 = R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \end{cases}$$

cette différentielle prend la forme

$$r^3 \sin^2\alpha \sin\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

et donne, intégrée entre les limites convenables,

$$2\pi^2 R^3.$$

Si l'on appelle

$$A_2, A_3, A_4 \qquad \text{et} \qquad B_2, B_3, B_4$$

le contenu et le contenant de ce lieu qui porte successivement, dans nos trois géométries, les noms de *circonférence, sphère* et *hypersphère,* on a

$$\begin{cases} A_2 = \pi R^2, \\ A_3 = \frac{4}{3}\pi R^3, \\ A_4 = \frac{1}{2}\pi^2 R^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2 = 2\pi R, \\ B_3 = 4\pi R^2, \\ B_4 = 2\pi^2 R^3, \end{cases}$$

et l'on voit qu'il y a entre ces valeurs les relations

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{R}{2}, \qquad \frac{A_3}{B_3} = \frac{R}{3}, \qquad \frac{A_4}{B_4} = \frac{R}{4},$$

c'est-à-dire que *le contenu se déduit du contenant en multipliant par le rayon et divisant par le degré du champ.* Cette formule se représentera §§ 43 et 56.

§ 34. — Les cônes.

On sait que, si l'on veut obliger une quadrique à avoir un point double (il n'y a pour cela qu'à égaler son discriminant à zéro), elle se *particularise,* dans la géométrie plane, en *un système de deux droites.*

Dans la géométrie de l'espace, le point double cherché, sans vous consulter, se complique d'une multiplicité infinie, et prend le titre de sommet : vous avez *un cône.* C'est ce que nous appellerons le *cône ordinaire,* ou à deux dimensions; dans l'étendue, un plan le coupe en deux points, à moins qu'il ne soit avec lui dans un même espace ; un espace le coupe suivant une conique. Quant au système de deux droites, ce n'est plus une conique particularisée, mais *dégénérée.*

Sous la même condition d'avoir un point double, la quadrique de la géométrie à quatre dimensions se particularise aussi en un cône, et elle peut le faire de deux façons (qui dépendent des déterminants du discriminant). Dans la première, vous avez *un sommet,* et, dans la seconde, *une infinité de sommets en ligne droite.* Ce sont les deux cônes à trois dimensions : celui de première espèce, et celui de seconde espèce. Quant au cône à deux dimensions, il n'est plus, à son tour, qu'une quadrique dégénérée.

1° *Hypercône de première espèce.*

C'est le lieu des droites menées d'un point fixe appelé *sommet* à tous les points d'une *surface* du second degré. On peut aussi l'engendrer en faisant correspondre homographiquement les espaces générateurs de deux plans fixes se coupant suivant un point : il est le lieu des plans d'intersection de deux espaces correspondants.

Il contient deux systèmes de plans; ceux d'un même système n'ont d'autre point commun que le sommet; ceux de systèmes différents se coupent suivant une droite.

D'un point extérieur à l'hypersphère, on peut lui mener un ∞^2 de tangentes, qui forment un hypercône de première espèce. Cet hypercône particulier est *circulaire,* et a pour axe le diamètre passant par son sommet. Les points de contact des tangentes sont sur une surface sphérique dont l'espace est perpendiculaire à ce diamètre; on l'appelle *la sphère de contact.*

2° *Hypercône de seconde espèce.*

C'est le lieu des plans menés par une droite fixe appelée *droite-sommet* et par les points d'une conique directrice.

D'une droite extérieure à une hypersphère, on peut lui mener un ∞^1 de plans tangents qui forment un hypercône circulaire de seconde espèce. Il a deux plans de symétrie qui sont perpendiculaires entre eux suivant le mode absolu; l'un de ces plans est celui mené par la droite-sommet et par le centre de l'hypersphère. Tout espace passant par un de ces plans rencontre les plans générateurs suivant des droites symétriques deux à deux.

Chacun des plans de symétrie est *plan d'angles égaux* (§ 27) avec un plan générateur quelconque.

Les plans d'angles égaux avec un plan donné et le rencontrant en un même point forment un hypercône circulaire de seconde espèce. On peut déduire de ce théorème une construction *des angles de deux plans* (1).

§ 35. — L'échelle des êtres géométriques.

En résumé, voici l'échelle des êtres géométriques, jusqu'au champ du quatrième degré inclusivement

Dans le plan, champ du deuxième degré, il n'y a que des *lignes,* êtres à une dimension pouvant circonscrire des portions de plan appelées *aires.*

Dans l'espace, champ du troisième degré, il y a, en plus, des *surfaces,* êtres à deux dimensions, qui sont homogènes avec les aires, sont comme des plans courbes, et peuvent circonscrire des portions d'espace appelées *volumes,* ou *solides à trois dimensions.* Les lignes de l'espace ont plus de généralité que celles des plans, qui n'en sont que des cas particuliers.

Dans l'étendue, champ du quatrième degré, il y a, en plus des lignes et des surfaces, des *hypersurfaces,* êtres à trois dimensions, qui sont homogènes avec les volumes, sont comme des espaces courbes et peuvent circonscrire des portions d'étendue appelées *hypervolumes* ou *solides à quatre dimensions.* Les lignes et les surfaces de l'étendue ont plus de généralité que celles des espaces, qu'elles comprennent comme cas particuliers; quelques auteurs donnent aux secondes le nom d'*hypercourbes,* parce qu'elles ont la même situation dans l'étendue que les courbes dans l'espace.

Les corps correspondant au polygones de la géométrie à deux dimensions et aux polyèdres de celle à trois, ont reçu le nom d'*hyperpolyèdres,* ou *polyédroïdes;* ils feront l'objet du Chapitre suivant.

On voit que la géométrie à quatre dimensions implique l'existence, non seulement d'une infinité d'espaces linéaires, c'est-à-dire pareils au nôtre et n'en différant que par leur situation dans

(1) VERONESE, *Fondamenti di Geometria.* Padoue, 1891; p. 502.

l'étendue, mais encore celle d'une infinité d'*espaces courbes,* qui sont les hypersurfaces de tous degrés. Ces espaces plus généraux diffèrent de l'espace ordinaire et diffèrent les uns des autres comme les surfaces diffèrent du plan et diffèrent les unes des autres; ils ne sont pas identiques à eux-mêmes dans leurs parties; ils sont donc aptes à contenir certaines formes géométriques et non certaines autres, comme, dans le monde à trois dimensions, une surface sphérique se refuse à recevoir un triangle sphérique provenant d'une autre sphère dont le rayon n'est pas égal au sien; ils n'ont pas cette qualité, qui appartient à notre espace seul, que nous avons démontrée au § 22, que M. Delbœuf (1) appelle *homogénéité,* et qui permet de *majorer* ou *minorer* une figure sans en modifier la forme.

Est-il permis de leur attribuer une existence concrète? On reviendra sur cette question au § 47.

---

(1) *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie.* Voyez aussi LECHALAS, *l'Espace et le Temps.*

CHAPITRE VIII.

LES POLYÉDROÏDES.

§ 36. — Généralités.

Ainsi qu'on vient de le dire, le nom de *polyédroïde* a été donné aux configurations qui correspondent, dans la géométrie à quatre dimensions, aux polyèdres de celle à trois et aux polygones de celle à deux. Comprendre un pareil corps n'est pas chose facile, même dans la mesure restreinte à laquelle nous nous sommes résignés en ce qui concerne la quatrième dimension; pour y arriver, il convient de partir du polygone, et de suivre de près l'évolution qui s'accomplit quand il s'élève, d'abord au rang de polyèdre, puis à celui de polyédroïde. Nous désignerons, en attribuant à ces notations un caractère *générique,* par

$$F_0,\quad F_1,\quad F_2,\quad F_3,$$

des figures dans lesquelles le nombre de dimensions est

zéro, un, deux ou trois,

c'est-à-dire qui sont formées de points, de lignes, de surfaces ou de volumes.

La figure que forment, *dans un plan,* des portions de droite se touchant deux à deux par leurs extrémités, et ne laissant entre elles aucune interruption, est un polygone. Elle a deux sortes de *figures limitantes*: les côtés, qui sont des F_1, et les sommets, qui sont des F_0; chaque sommet sert de contact entre deux côtés une fois, et rien qu'une.

Augmentant les dimensions d'une unité, nous dirons: La figure que forment, *dans un espace,* des portions de plans se touchant

deux à deux par leurs bords et ne laissant entre elles aucune interruption est un *polyèdre;* les portions des plans s'appellent les *faces*, et les bords communs par lesquels elles se touchent s'appellent les *arêtes*. Les côtés, F_1, du polygone sont devenus des faces, F_2, du polyèdre ; le point de contact de deux côtés, F_0, est devenu la ligne de contact de deux faces, une arête, F_1 ; les bords d'une face servent chacun de contact une fois, et rien qu'une. Il est apparu un élément de plus : les *sommets,* F_0, dont chacun est l'aboutissant d'au moins trois faces et d'au moins trois arêtes. *Le polygone est devenu un polyèdre.*

Augmentons encore les dimensions d'une unité. La figure formée, *dans l'étendue,* par des portions d'espace se touchant deux à deux et ne laissant entre elles aucune interruption est un *polyédroïde;* les portions d'espace s'appellent *les cases* (1), et les portions de plan par lesquelles elles se touchent s'appellent les *faces*. L'arête, F_1, qui était, dans le polyèdre, la ligne de contact de deux faces, est devenue une *face* F_2, suivant laquelle se touchent deux cases; chaque face d'une case sert une fois, et une seule, de face de contact. Le sommet F_0, qui était l'aboutissant d'au moins trois faces, est devenu une portion de droite F_1, que nous appellerons encore une *arête* pour ne pas créer de mot, et qui est l'aboutissant d'au moins trois cases. Enfin il est apparu un élément de plus : les *sommets,* F_0, dont chacun est l'aboutissant d'au moins trois cases et d'au moins quatre arêtes. *Le polyèdre est devenu un polyédroïde.*

Le polygone, le polyèdre et le polyédroïde ont, chacun dans le champ qui lui est dévolu, un *intérieur* et un *extérieur,* et c'est un point qui n'a pas toujours été bien compris en ce qui concerne le dernier. Nous l'expliquerons au moyen de la figure suivante, représentant un polyédroïde particulier

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16,$$

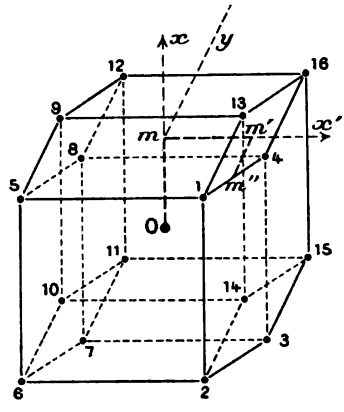
qui fera l'objet du § 42.

Considérons un point matériel partant du centre O et marchant sur une ligne indéfinie Ox perpendiculaire à l'un S des espaces

(1) Les Allemands et les Anglais disent: *cellules* (Zell, Cell).

constituants. Arrivé à celui-ci, il le traverse en un point m, et il le traverse instantanément, parce que l'espace a, dans ce sens, une dimension infiniment petite (§ 2). Il se trouve alors libre dans l'étendue quatre fois infinie; il est passé de l'*intérieur* à l'*extérieur* du polyédroïde. Ce sera la même chose si, en passant

Fig. 12.



au point m, il dévie sur une direction my faisant avec Ox un angle quelconque *autre que* 90°.

Si, en arrivant au point m, il quitte la direction Ox et s'engage sur une des ∞^2 directions qui lui sont perpendiculaires (§ 14), par exemple mx', il se trouvera dans l'espace S, et il y sera enfermé dans *une case*

$$1.4.16.13.5.8.12.9;$$

de quelque côté qu'il se tourne, il en aura une face devant lui. Supposons qu'il vienne se heurter contre une de celles-ci en un point m', et suivant une direction perpendiculaire $mm'x'$. S'il conserve cette direction ou s'en écarte d'un angle *différent de* 90°, il traversera le plan et se trouvera dans un autre espace S', enfermé dans une autre case

$$1.4.16,13.2.3.15.14$$

pareille à la première, où les mêmes péripéties l'attendent.

Mais si, étant en m', il s'engage sur une des ∞^1 directions de l'espace S qui sont perpendiculaires à $m'x'$, par exemple $m'm''$, alors

il se trouvera dans un plan et il y sera enfermé dans un polygone

1.4.16.13.

Qu'il marche jusqu'à ce qu'il arrive à un côté 1.4 de celui-ci; là, il voit avec étonnement plusieurs plans se présenter à lui, sans compter celui par lequel il est arrivé. Il y en a *trois* au total dans la figure qui sert de support à notre démonstration, savoir:

1.4.16.13; 1.4.8.5 et 1.4.3.2;

nous verrons (§§ 42 et 46) un cas où il y en a *quatre* et un autre où il y en a *cinq*. Notre mobile n'a aucune raison pour préférer l'un ou l'autre plan et, dans chacun d'eux, l'une ou l'autre moitié; embarrassé de son libre arbitre, il se trouve en un de ces *points singuliers de trajectoire* étudiés par M. Boussinesq (1). Quel que soit le plan qu'il prenne, une des deux moitiés le ramène dans un polygone, l'autre lui donne la liberté dans le plan. Enfin, s'il longe le côté même, il arrive à un sommet.

En définitive, le mobile peut, à un instant quelconque, se libérer dans l'étendue en se dirigeant vers un quelconque des points de l'espace situé à l'infini de celle-ci, pourvu, lorsqu'il se trouve dans une case, que ce ne soit pas un des points du plan d'intersection de cet espace avec celui de cette case. Il peut aussi, par de judicieux changements de direction, gagner une figure limitante du genre F_3, ou F_2, ou F_1, ou F_0, et devenir habitant d'un espace, ou d'un plan, ou d'une droite, ou d'un point unique.

Quelques points de cette organisation se dérobent à notre perception, mais non à notre analyse. Ils se préciseront quand nous examinerons les polyédroïdes réguliers et nous y reviendrons avec celui qui se présentera le premier : l'octaédroïde.

Les arêtes partant d'un sommet S d'un polyèdre forment par leurs autres extrémités un *polygone* dont les sommets et les côtés sont des sommets et des côtés du polyèdre. De même, si l'on considère les autres extrémités des arêtes partant d'un sommet S d'un polyédroïde, ces points sont les sommets d'un *polyèdre*, dont les sommets, les arêtes et les faces sont des sommets,

(1) *Conciliation du Déterminisme et de la liberté morale.* Lille, 1878. — *Voy.* aussi notre Ouvrage : *Introduction à la Théorie de l'Énergie,* p. 141.

des arêtes et des faces du polyédroïde. Ce polyèdre joue un rôle important dans l'étude de l'hypercorps, ainsi que nous le verrons plus loin (§ 39).

De même que toutes les arêtes d'un polyèdre sont *doubles,* c'est-à-dire appartiennent à *deux faces,* de même toutes les faces d'un polyédroïde sont *doubles,* c'est-à-dire appartiennent à *deux cases.* S'il s'en trouve parmi les premières qui soient *simples,* elles forment ensemble un polygone qui est le *bord d'un trou;* s'il s'en trouve parmi les secondes qui soient *simples,* elles forment ensemble un polyèdre qui est *la paroi d'un évidement.* Polygone et polyèdre peuvent ne pas être contenus en entier, le premier dans un plan, le second dans un espace.

§ 37. — Formule d'Euler.

Si l'on appelle :

p_0, p_1 le nombre des sommets et celui des côtés d'un polygone,

p_0, p_1, p_2 ceux des sommets, des arêtes et des faces d'un polyèdre,

p_0, p_1, p_2, p_3 ceux des sommets, des arêtes, des faces et des cases d'un polyédroïde,

il y a entre ces nombres les relations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} p_0 - p_1 = 0, \\ p_0 - p_1 + p_2 = 2, \\ p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0. \end{cases}$$

La première est évidente. La seconde est la célèbre *formule d'Euler*, donnée en ces termes, par ce grand mathématicien, dans le *Recueil de l'Académie de Saint-Pétersbourg* pour les années 1752-53 [1] :

In omni solido hedris planis incluso, numerus hedrarum unà cum numero angulorum solidorum, binario excedit numerum acierum.

---

[1] *Novi commentarii Academiæ Scientiarum J. Petropolitanæ,* tomus IV, ad annum 1752-53; Petropoli, 1758.

Il a été signalé presque en même temps par Prouhet à l'Académie des Sciences de Paris (1) et par Baltzer à celle de Berlin (2), que le théorème d'Euler se trouve dans Descartes, qui toutefois ne l'énonce pas explicitement (*Œuvres inédites de Descartes,* publiées par Foucher de Careil; Paris, 1860, t. II, p. 214).

Un très grand nombre de mathématiciens se sont occupés de ce théorème, pour en donner, soit des démonstrations, dont quelques-unes ont peu de valeur, soit des généralisations. Citons Legendre, Steiner, Grünert, Gergonne, Kirkmann, Schubert, Durège, Lhuilier, Cauchy, Listing, Cayley, Halsted, Poinsot, Jordan, amiral de Jonquières, Perrin (3). La meilleure démonstration est peut-être encore celle d'Euler qu'il ne trouva, paraît-il, qu'avec beaucoup de peine et après le théorème lui-même, et de laquelle dérivent celles de Cauchy, de l'amiral de Jonquières, etc.; chose remarquable, elle n'emploie que les notions les plus élémentaires de Géométrie.

Elle consiste dans cette suite de trois propositions, chacune de démonstration facile (p. 145 à 158 du volume cité) :

1° Proposito solido quocumque hedris planis incluso, indè datum angulum solidum ita resecare, ut in solido residuo numerus angulorum solidorum unitate sit minor.

2° Si à corpore proposito angulus quispiam solidus modo antè exposito

---

(1) *Comptes rendus,* 1860, 1er semestre, p. 779.

(2) *Monatsberichte,* 1861, p. 1143.

(3) On peut voir :

1° Sur les polyèdres en général : Brückner, *Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte,* in-4°, Leipzig, 1900, Ouvrage qui peut s'appeler l'*Encyclopédie* de la question; Listing, *Mémoires de Gottingue,* 1831; Cayley, *Philosophical Magazine,* 1861; Jordan, *Recherches sur les polyèdres* (*Journal de Crelle,* t. 68, 1867; Amiral de Jonquières, *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CX, 1890; Eberhard, *Zur Morphologie der Polyeder*; Leipzig, 1891.

2° Sur les polyèdres réguliers : Bravais, *Les polyèdres symétriques de la Géométrie* (*Journal de Liouville,* 1849); Badoureau, *Mémoire sur les figures isoscèles* (*Journal de l'École Polytechnique,* 49e Cahier, 1881); Hugel, *Die regulären und halbregulären Polyeder,* mit 113 stereoscopischer Figuren, Neustadt a. d. H., 1876; Wiener, *Herstellung der platonischen Körper aus Papierstressen,* Munich, 1893; Hess, *Eintheilung in die Lehre von der Kugeltheilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder,* in-8°, 1883.

resecetur, sicque numerus angulorum solidorum S unitate minuatur, ut sit S — 1, tum differentia inter numerum acierum A et numerum hedrarum H erit A — H — 1.

3° Continuata hac mutilatione, quando ad pyramidem triangularem deveniatur, in quâ S = 4, H = 4, A = 6, evidens est, si fiat S — n = 4, fore A — H — n = 2, undè S — 4 = A — H — 2, seu H + S = A + 2.

L'amiral de Jonquières a montré que le théorème d'Euler est vrai pour toute espèce de polyèdre, convexe ou non, et pour tout agrégat de polyèdres, à la condition que, dans ce dernier cas, deux polyèdres constituants soient adhérents entre eux par une face, même partielle, mais non par une arête ou un sommet.

L'étude des polyèdres est entravée par la difficulté de se représenter ces corps lorsque le nombre de leurs éléments n'est pas très petit. Dans un Mémoire publié en 1865, Catalan, après une fort bonne discussion des conséquences de la formule d'Euler, a donné une assez curieuse méthode pour reconnaître la possibilité de construire un polyèdre dont on donne les éléments : faces, arêtes et sommets; c'est une sorte d'échiquier au moyen duquel le problème est ramené à une question de Géométrie plane analogue à celle du saut du cavalier des échecs, à celle du jeu de solitaire, etc. (1).

La troisième des équations (1) est moins facile que la seconde à établir directement; Stringham et Durège (2) l'ont fait, mais nous ne reproduirons ni l'une ni l'autre démonstration. En réalité, la question relève de l'*Analysis situs,* qui donne une formule générale dont les trois équations (1) ne sont que des cas particuliers : là est leur véritable démonstration.

La formule à laquelle nous faisons allusion s'appelle *la formule d'Euler généralisée;* elle exprime que, si l'on considère dans l'espace à n dimensions un polyèdre à $n-1$ dimensions, et si l'on appelle p_0, p_1, p_2, ..., p_{n-1} le nombre de ses *figures*

(1) *Mémoire sur les polyèdres,* dans le *Journal de l'École Polytechnique* pour 1865. — *Voir* aussi : MANSION, *Discours sur les travaux mathématiques de Catalan,* dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége,* 2e série, t. XII, mai 1885.

(2) *Ueber Körper von vier Dimensionen* (*Académie des Sciences de Vienne,* 1881, t. I, p. 1110-1125).

limitantes

de degré 0 (les sommets).
» 1 (les arêtes).
» 2 (les faces).
» 3 (les cases),
» 4 (les corps à quatre dimensions),
» ....., etc.,

on a

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \ldots \pm p_{n-1} = 1 - (-1)^n,$$

c'est-à-dire que la somme formant le premier nombre est égale à zéro ou à deux, suivant que n est impair ou pair. Ce beau théorème paraît devoir être attribué à Stringham, et alors il daterait de 1880. On en trouvera la démonstration dans l'*Analysis situs* de Poincaré, p. 100 à 121 (1). On peut voir aussi le Mémoire de Stringham (2) et celui de Durège (3).

§ 38. – La question des polyédroïdes réguliers.

Nous ne nous occuperons plus maintenant que des *polyédroïdes réguliers*, appelant ainsi ceux dont les cases sont des *polyèdres convexes et réguliers, tous égaux entre eux et faisant entre eux des angles d'espace égaux*. On sait que ceux-ci, qui, à leur tour, ont pour faces des *polygones convexes et réguliers, tous égaux entre eux et faisant entre eux des dièdres égaux,* sont au nombre de *cinq,* qu'on appelle les cinq solides de Platon, et dont Képler s'est beaucoup occupé (4). Le Tableau suivant en rappelle les noms et la composition :

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique,* 1895, et *Rendic. di Palermo,* 1899. *Voir* aussi *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* 1893, II.

(2) *American Journal of Math.,* 1880, et *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1881, p. 212.

(3) *Wiener Sitzungsb.,* 1881, p. 83.

(4) *Mysterium cosmographicum... demonstratum per quinque regularia corpora geometrica.* Tubingue, 1593.

TABLEAU I. — LES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS.

NOMS DES POLYÈDRES.	NOMBRE ET NATURE DES FACES.	NOMBRE DES			Angle de deux faces adjacentes (φ).
		arêtes.	sommets.	faces ou arêtes aboutissant à un sommet.	
L'hexaèdre, ou cube...	6 carrés.	12	8	3	90°
Le tétraèdre.....	4 triangles.	6	4	3	70°31′40″
L'octaèdre.....	8 »	12	6	4	109°28′16″
L'icosaèdre.....	20 »	30	12	5	138°11′23″
Le dodécaèdre.....	12 pentagones.	30	20	3	116°33′54″
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

On verra que les *polyédroïdes réguliers* sont au nombre de *six*, ayant respectivement

8, 5, 16, 600, 24, 120 cases.

Suivant un usage devenu loi, on prend pour base de la nomenclature le nombre des figures limitantes du degré le plus élevé. Nous désignerons donc les six corps par la lettre C accompagnée de ces nombres, ainsi que le montre le Tableau II, établi sur le même modèle que celui des polyèdres; cette lettre a été prise comme étant l'initiale du mot *Case*, en anglais *Cell*, en allemand *Zell;* on la trouve aussi dans les ouvrages anglais, et elle est remplacée par Z chez les auteurs allemands. Le Tableau II donne dès à présent tous les éléments des polyédroïdes; ils seront repris et établis dans les paragraphes qui suivent. Par angle de deux cases, dans sa dernière colonne, on entend l'angle des deux espaces (§ 21) dans lesquels elles se trouvent, comme par *angle de deux faces,* dans le premier Tableau, on a entendu celui des plans de ces faces.

TABLEAU II. — LES SIX POLYÉDROÏDES RÉGULIERS.

DÉSIGNATION DES POLYÉDROÏDES.	NOMBRE ET NATURE		NOMBRE DES						Angle de deux cases adjacentes (γ).
	des cases.	des faces.	arêtes.	sommets.	cases ou faces aboutissant à chaque arête.	éléments aboutissant à chaque sommet : cases.	faces.	arêtes.	
C^{8}.....	8 hexaèdres.	24 carrés.	32	16	3	4	6	4	90°
C^{5}.....	5 tétraèdres.	10 triangles.	10	5	3	4	6	4	75°31′21″
C^{16}.....	16 »	32 »	24	8	4	8	12	6	120°
C^{600}.....	600 »	1200 »	720	120	5	20	30	12	164°28′39″
C^{24}.....	24 octaèdres.	96 »	96	24	3	6	12	8	120°
C^{120}.....	120 dodécaèdres.	720 pentagones.	1200	600	3	4	6	4	144°0′12″
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

Les noms qui suivent ont été donnés par Stringham en 1880, et ont été adoptés par les auteurs qui ont écrit depuis en anglais et en français; nous les adopterons aussi, bien qu'ils soient peu satisfaisants (1), mais nous ferons largement usage des abréviations données dans la première colonne du Tableau II.

Nous indiquons à leur suite les noms dont les auteurs allemands font usage.

C^8. — L'octaédroïde. — Achtzell.

C^5. — Le pentaédroïde. — Fünfzell.

C^{16}. — L'hexadécaédroïde. — Sechszehnzell.

C^{600}. — L'hexacosiédroïde. — Sechshundertzell.

C^{24}. — L'icosatétraédroïde. — Vierundzwanzigzell.

C^{120}. — L'hécatonicosaédroïde. — Einhundertzwanzigzell.

La question des polyédroïdes réguliers est difficile; mais elle a été très étudiée, elle l'a été par les méthodes les plus variées, et l'on en est aujourd'hui bien maître. Pour la première fois, les matériaux abondent entre nos mains.

Elle remonte à 1880. A cette date, Stringham (2), professeur à l'Université de Californie, l'ouvre dans le *American Journal of Mathematics,* que dirigeait alors Sylvester, par un important Mémoire dans lequel il généralise la formule d'Euler, établit l'existence des six corps réguliers, en décrit la construction, en donne quelques dimensions. En 1882 et 1883, presque simultanément, apparaissent les travaux de Rudel, à Kaiserslautern (3); de

(1) Ces mots ne sont pas bien faits. Si l'on conserve le principe, déjà peu judicieux lui-même, de baser la nomenclature sur le nombre des cases, il faudrait remplacer l'élément *èdre,* qui correspond au mot *face* comme on a vu, § 36, par un autre correspondant au mot *case,* et supprimer l'élément *oïde,* qui n'aurait plus alors de raison d'être. C'est la facture des noms allemands. Hoppe et Brückner, en allemand, emploient le mot *polytope* au lieu de *polyédroïde;* Hinton et Proctor Hall, en anglais, emploient le mot *tessaract* au lieu d'*octaédroïde.* — Il nous paraîtrait judicieux de n'employer le mot *Hyperpolyèdre* que pour les polyèdres (corps à trois dimensions dont les faces limitantes sont des *polygones*) qui n'ont pas tous leurs sommets dans un même espace.

(2) STRINGHAM, *Regular figures in n-dimensional Space* (*American Journal of Mathematics,* 1880).

(3) RUDEL, *Von Körper höherer Dimension;* Kaiserslautern, 1882.

Hoppe, à Leipzig (1); de Schlegel, à Halle (2); de Puchta, à Prague (3); tous ces auteurs paraissent avoir traité la question chacun de son côté et l'ont résolue plus ou moins complètement. La solution la plus complète est celle de Puchta, travail considérable qui a fourni les matériaux de tous ceux venus depuis; on y trouve, en Tableaux numériques, les quatre coordonnées de tous les sommets des six polyédroïdes. Schlegel construit des modèles en relief représentant les projections sur notre espace (4), et en montre pour la première fois la collection complète, en 1884, dans un Congrès de naturalistes et de médecins allemands, à Magdebourg. Un Mémoire de Cesaro publié en 1887 (5) n'avance pas beaucoup la question. En 1889, M. Goursat (6), de la Faculté de Paris, la ramène à ce problème de Géométrie à trois dimensions: *Diviser l'espace en corps réguliers égaux de manière qu'ils le remplissent sans vides,* et fait naître ainsi les six polyédroïdes d'une manière aussi élégante que nouvelle. Le même M. Goursat, puis Maschke en Amérique (7), puis van Oss en Hollande (8), appliquent à ces corps la théorie des *Groupes de rotations* fondée par Klein dans ses *Leçons sur l'Icosaèdre,* dont nous avons dit un mot dans notre avant-propos; le travail de van Oss prend appui

(1) HOPPE, *Regelmässige linearbegrentzte Figuren von vier Dimensionen* (*Archiv der Mathematik und Physik,* gegründet von Grünert, fortgesetzt von Hoppe, Leipzig, 1882).

(2) SCHLEGEL, *Theorie der homogenen zusammengesetzen Raumgebilde* (*Nova Acta Acad. Cæsareæ Leopoldo-Carolinæ germanicæ naturæ curiosorum*; Halle, 1883). — *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions* (*Bulletin de la Soc. Math. de France,* 1882).

(3) PUCHTA, *Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen* (*Sitzungsberichte der k. Acad. der Wissenschaften zu Wien,* 1883; aussi 1884 et 1892).

(4) Librairie Martin Schilling, à Halle.

(5) *Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli Spazii. Milan,* 4°. 1887.

(6) GOURSAT, *Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace* (*Annales sc. de l'École Normale supérieure,* 1889).

(7) MASCHKE, *The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color-diagrams* (*American Journal of Mathematics,* t. XVIII, 1896).

(8) VAN OSS, *Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen.* Giessen, 1894. — *Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbtsdeckende Bewegungen* (*Verhandlingen der k. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam,* 1899).

sur de belles épures. Tout récemment, M. Schoute (1), en Hollande, refait les calculs et les Tableaux de Puchta, et complète l'étude, commencée par Schlegel et par Proctor Hall (2), des projections et des sections spatiales. Enfin ces dernières sont traitées par la méthode des *rabattements,* par Mme Alicia Boole Stott (3), fille d'un mathématicien distingué, un des créateurs de l'*Application de l'Algèbre à la Logique* (4).

§ 39. — Arêtes et sommets.

I. Il suit de la condition de *régularité* que le polyédroïde est déterminé par le nombre des sommets et la constitution de l'un d'eux. Laissant de côté la longueur de l'arête, que nous supposerons fixée une fois pour toutes, et que nous désignerons par a, il n'existe qu'un individu de chaque espèce. Les sommets sont régulièrement répartis sur une hypersphère, dont le rayon R et le centre O sont déterminés et que l'on appelle l'*hypersphère circonscrite.*

En outre, il résulte de la condition de *convexité* qu'on doit pouvoir mener par le sommet un espace laissant le polyédroïde tout entier du même côté; il faut pour cela que les cases réunies en ce sommet y fassent un angle solide moindre que *huit fois un trièdre droit* (*voir* § 24). Or l'angle polyédral est égal à celui-ci multiplié par un coefficient k qui est

1,00000	pour	l'hexaèdre,
0,35096	»	le tétraèdre,
0,86539	»	l'octaédre,
1,88550	»	le dodécaèdre,
1,67720	»	l'icosaèdre;

(1) Schoute, *Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles, Sechszehnzelles, und Vierundzwanzigzelles im vierdimensional Raume* (*Verhandlingen der k. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam,* 1894). — *Regelmässige Schnitte und Projectionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume* (*Id.*).

(2) Proctor Hall, *The projections of four-fold figures upon a three-flat* (*American Journal of Mathematics,* 1893).

(3) Alicia Boole Stott, *On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids* (*Verhandlingen,* 1900).

(4) Boole, *Mathematical analysis of Logics;* Londres, 1844.

on ne peut donc en réunir qu'un nombre n satisfaisant à la condition

$$nk < 8.$$

Avant d'aller plus loin il est nécessaire de rappeler la suite des considérations par lesquelles le géomètre à trois dimensions forme les polyèdres réguliers au moyen des polygones réguliers.

1°. L'angle formé par deux côtés est 60° dans le triangle équilatéral, 90° dans le carré, 54° dans le pentagone, etc. Par suite, on peut réunir *dans le plan,* autour d'un point, sans qu'ils arrivent à se toucher ou à empiéter les uns sur les autres : trois, quatre ou cinq triangles, trois carrés, trois pentagones; mais on

Fig. 13.

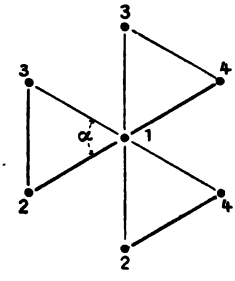


Fig. 14.

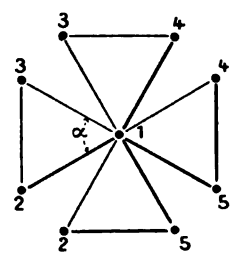
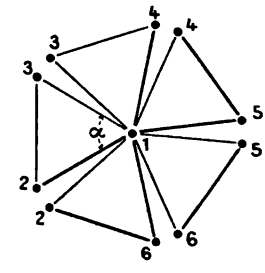


Fig. 15.



ne saurait ni augmenter ces nombres, ni prendre d'autres polygones, étant donné qu'il n'en faut pas moins de trois. Les trois premiers cas sont représentés par les figures 13, 14, 15; le lecteur est prié de faire lui-même la figure pour les deux autres.

Prenant d'abord le cas de trois triangles (*fig.* 13), on forme un angle solide en *détachant du plan commun,* qui est le plan du papier, chacun des plans 123, 134, 142, et le faisant tourner, de dessus en dessous, autour d'une droite du plan convenablement choisie, jusqu'à ce que les deux arêtes marquées 12, les deux marquées 13 et les deux marquées 14 se touchent et n'en fassent qu'une. On voit sans peine qu'après le mouvement les points 2, 3, 4, en chacun desquels se sont réunis deux points portant le même numéro, forment un triangle équilatéral; ce triangle *ferme* la figure constituée par les trois premiers, et l'on a un solide régulier : c'est le *tétraèdre.*

Par des rotations analogues, la figure 14 donne un angle solide

1 2 3 4 5 formé par la réunion de quatre angles plans en 1, et dont la *base* 2 3 4 5 est un carré; il faut cette fois, pour faire un solide régulier, accoler à cette première figure une figure symétrique 1′ 2′ 3′ 4′ 5′, les arêtes 2′ 3′, 3′ 4′, 4′ 5′, 5′ 2′ n'en faisant qu'une avec leurs homologues; on a alors l'*octaèdre* (*fig.* 28).

Dans le cas de la figure 15, les bords des cinq triangles forment, après leur réunion, un pentagone régulier 2 3 4 5 6. Sur le sommet 2, accrochons trois triangles formant avec les deux qui y sont déjà un sommet identique à 1. En continuant ainsi de sommet en sommet, les bords libres des nouveaux triangles formeront une deuxième bordure 7 8 9 10 11 parallèle et identique

Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18.

5

6

à la première, et l'on aura l'*icosaèdre* en la coiffant avec une figure 12 symétrique de 1 (*fig.* 19).

Si l'on prend des carrés, on ne peut former qu'une seule sorte de sommet, et l'on a l'*hexaèdre,* ou cube (*fig.* 24), familier à tous nos lecteurs.

Enfin, si l'on prend des pentagones, on ne peut encore les réunir que par trois. Plaçons-en un horizontalement (*fig.* 19) et attachons-en cinq autres, un à chacune de ses arêtes, de manière qu'ils se touchent par leurs côtés; nous aurons cinq sommets identiques parce que deux pentagones consécutifs font entre eux le même angle dièdre que chacun d'eux fait avec le premier. De plus, deux arêtes libres consécutives font entre elles un angle égal à l'angle pentagonal : 108°; ces arêtes libres forment un décagone dentelé et, si l'on emboîte dans cette première moitié une deuxième moitié toute pareille, on a le *dodécaèdre* régulier.

Les figures 19 inférieures représentent : celle de gauche, la

projection de l'icosaèdre régulier sur un plan parallèle à une première et à une deuxième diagonale perpendiculaires entre elles; celle de droite, la projection du dodécaèdre régulier sur un plan parallèle à une deuxième et à une troisième diagonale perpendiculaires entre elles; on appelle premières, deuxièmes et troisièmes diagonales les lignes qui joignent : deux sommets

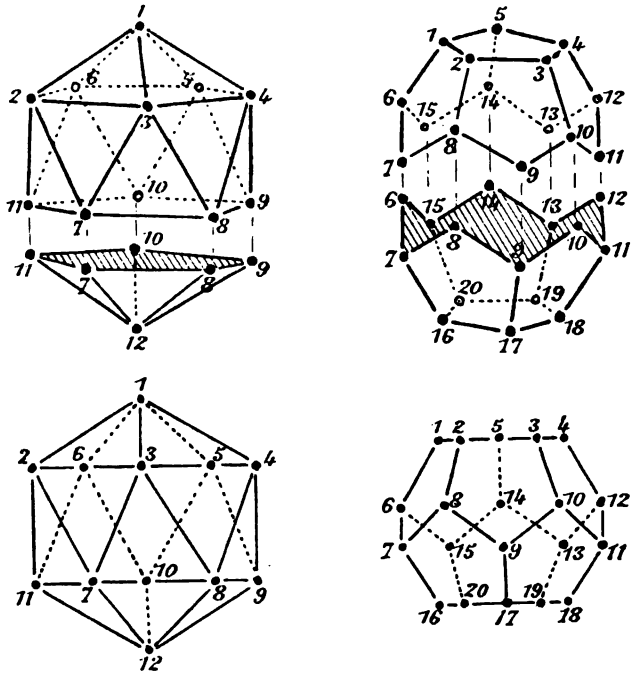


Fig. 19. -- L'icosaèdre et le dodécaèdre réguliers.

opposés, les milieux de deux arêtes opposées, les centres de deux faces opposées (1).

II. Répétons cette description en augmentant les dimensions d'une unité, ainsi qu'il est dit au § 36.

1° Si l'on multiplie par 3 la valeur φ (Tableau I) qui est afférente à l'icosaèdre, par un nombre plus grand que 5 celle qui est

(1) On verra, § 45, d'autres projections de l'icosaèdre et du dodécaèdre, faites sur des plans non situés dans le même espace que le corps.

afférente au tétraèdre, et chacune des trois autres par un nombre plus grand que 3, le produit se trouve supérieur à 360°. Par suite, on peut réunir dans l'espace, sur une même arête, sans qu'ils arrivent à se toucher ou à empiéter les uns sur les autres, jusqu'à trois, quatre ou cinq tétraèdres, trois hexaèdres, trois octaèdres, trois dodécaèdres, mais on ne saurait ni augmenter ces nombres, ni se servir de l'icosaèdre. Cela fait six assemblages et, par suite, il ne peut exister au plus que six polyédroïdes réguliers.

Les figures 16, 17, 18 représentent, pour les cas de trois, quatre et cinq tétraèdres (le lecteur est prié de se faire lui-même la figure pour les trois autres cas), la coupe de l'assemblage par un plan perpendiculaire au milieu de l'arête considérée; 12 y est la projection commune de deux points 1 et 2 situés de part et d'autre du papier à la distance d'une demi-longueur d'arête, et les triangles ombrés disposés autour de ce point sont les sections faites par le plan du papier dans les tétraèdres. Ceux-ci sont donc :

1234, 1245, 1253 pour la première figure,
1234, 1245, 1256, 1263 pour la deuxième figure,
1234, 1245, 1257, 1276, 1263 pour la troisième figure.

2° Prenant la figure 16, séparons de l'espace commun chacun des espaces contenant les trois tétraèdres, et faisons-les tourner de dessus en dessous (§ 15), autour d'un plan convenablement choisi dans le premier espace, de manière à amener au contact les deux faces marquées 123, les deux marquées 124 et les deux marquées 125; les trois plans 123, 124 et 125 forment un trièdre de seconde espèce (§ 23).

3° Faisant successivement de même pour les cinq autres assemblages, on a six choses à quatre dimensions, qu'à défaut d'un nom que nous ne voulons pas fabriquer, nous appellerons des *arêtes garnies,* la *garniture* consistant en 3, 4 ou 5 tétraèdres, 3 hexaèdres, 3 octaèdres, ou 3 dodécaèdres; elles correspondent à la sixième colonne du Tableau II.

III. Il s'agit maintenant de former un *sommet* en réunissant sur un même point de l'étendue les bouts d'un certain nombre d'arêtes garnies; nous allons arriver, plus simplement que le

lecteur ne peut l'espérer, à confectionner cette singulière *calotte,* mais il devra avoir bien présentes à l'esprit les deuxième et cinquième colonnes du Tableau I.

Supposons un polyédroïde existant et construit; nous avons déjà appelé O et R le centre et le rayon de l'hypersphère qui lui est circonscrite. Considérons un sommet, que nous désignerons indifféremment par la lettre s ou par le chiffre 1, suivant la commodité du moment, et soient 2, 3, 4, 5, 6,... les divers sommets qui l'entourent, c'est-à-dire les autres bouts des arêtes dont il est le point de départ. Ces bouts sont sur une même hypersphère de rayon a, et, par raison de symétrie, sont aussi sur un même espace perpendiculaire au rayon sO (1); leur ensemble est une figure régulière à trois dimensions que nous appellerons F. Cela posé :

1° Si les cases constitutives du sommet s sont des *tétraèdres,* les points 2, 3, 4, 5, 6, ... se groupent en triangles équilatéraux appartenant respectivement à chacune d'elles. Mais le Tableau I montre qu'il n'y a que trois figures régulières à trois dimensions limitées par des triangles, savoir : le tétraèdre avec quatre faces, six arêtes, quatre sommets; l'octaèdre avec huit faces, douze arêtes et six sommets; l'icosaèdre avec vingt faces, trente arêtes, douze sommets. Les cases dont il s'agit ne peuvent donc être qu'au nombre de quatre, huit ou vingt.

Dans le premier cas, la figure F est un tétraèdre 2 3 4 5; il part du sommet s quatre cases tétraédrales, six faces planes et quatre arêtes; chaque arête porte trois tétraèdres et ils ont trois à trois une arête commune. On voit aisément que les points 2, 3, 4, 5 sont les sommets d'un cinquième tétraèdre égal aux premiers; celui-ci *ferme* la figure, et l'on a un corps régulier à quatre dimensions, qui n'est autre que le C^5, le pentaédroïde; nous le reprendrons au § 44.

Dans le second cas, la figure F est un octaèdre 2 3 4 5 6 7 (*fig.* 20); il part du sommet s huit cases tétraédrales, douze

(1) De même, s'il nous est permis de remplacer une fois une démonstration par une comparaison, que les points situés sur les arêtes d'une pyramide régulière à égale distance du sommet sont, à la fois, sur une surface sphérique ayant ce sommet pour centre et sur un plan perpendiculaire à l'axe de la pyramide.

faces planes et six arêtes. Chaque arête porte quatre tétraèdres, et ils ont quatre à quatre une arête commune. La figure 1 2 3 4 5 6 7 qu'ils forment est *ouverte* à l'opposé du point 1 ; on la *ferme* en lui accolant une figure symétrique 8 2 3 4 5 6 7, et l'on obtient

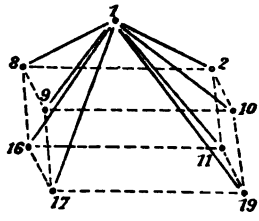


Fig. 20. — Calotte à base d'hexaèdre.

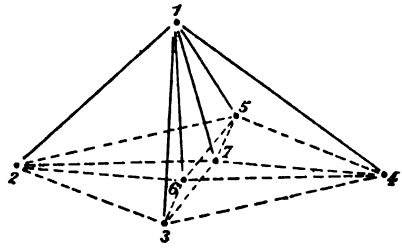


Fig. 21. — Calotte à base d'octaèdre.

ainsi un deuxième solide régulier, qui est le C^{16}, l'hexadécaédroïde ; il reparaîtra au § 42.

Dans le troisième cas, la figure F est un icosaèdre

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 (*fig.* 22) ;

il part du sommet *s* vingt cases tétraédrales, trente faces planes, douze arêtes, et chaque arête porte cinq tétraèdres. La figure est

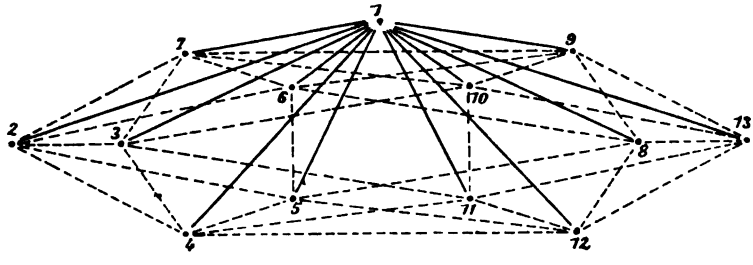


Fig. 22. — Calotte à base d'icosaèdre.

ouverte, mais nous ne pourrons la fermer que plus tard ; nous y reviendrons au § 46, et nous verrons que le sommet que nous venons de constituer fait partie du C^{600}, de l'hexacosiédroïde.

2° Si les cases constitutives du sommet *s* sont des *hexaèdres* ou des *dodécaèdres,* trois arêtes en partent pour le compte de chacun d'eux ; la figure F est encore formée par des groupes de

trois points, c'est-à-dire des triangles, et ne peut, comme dans le cas précédent, être qu'un tétraèdre, un octaèdre ou un icosaèdre. Mais le deuxième et le troisième cas ne sont pas admissibles parce que la condition $nk < 8$ du § 39 ne serait pas satisfaite, et le premier nous donne encore, comme partant du sommet s, quatre cases, six faces, quatre arêtes. Nous avons à faire au C^8, ou l'octaédroïde, si les faces sont des hexaèdres, et au C^{120}, ou l'hécatonicosaédroïde, si elles sont des dodécaèdres.

3° Enfin, si les cases constitutives du sommet s sont des *octaèdres,* chacun d'eux fournit quatre arêtes et produit un carré dans l'espace E. Comme le cube est le seul polyèdre limité par des carrés, la figure F est un cube 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (*fig.* 20), et a six faces, douze arêtes, huit sommets. Il part donc du sommet s six cases octaédrales, douze faces planes et huit arêtes ; le solide auquel nous sommes amenés est le C^{24}, ou l'icosatétraédroïde; il fera l'objet des §§ 44 et 45, où l'on peut voir comme exemple la calotte qui a pour sommet le point 8 et pour base le cube

1 2 7 9 12 13 15 24.

§ 40. — Établissement des coordonnées.

En résumé, chaque sommet est *une calotte,* corps à quatre dimensions, posant sur une base qui est un polyèdre, corps à trois dimensions, c'est-à-dire dont tous les points sont dans un même espace. Tous les sommets et toutes les arêtes de cette base sont aussi des sommets et des arêtes du corps. Calotte et base sont ainsi constituées :

		BASE.	ARÊTES.			
DANS LE	C^5	un tétraèdre.	4 arêtes garnies chacune de			4 tétraèdres.
	C^8	»	4	»	»	4 hexaèdres.
	C^{120}	»	4	»	»	3 dodécaèdres.
	C^{16}	un octaèdre.	6	»	»	8 tétraèdres.
	C^{24}	un hexaèdre.	8	»	»	3 octaèdres.
	C^{600}	un icosaèdre.	12	»	»	20 tétraèdres.

Il nous reste à trouver le nombre des sommets et à en fixer la

position. Pour que les six figures appartiennent de fait, non pas à un polyédroïde quelconque, mais à un polyédroïde régulier, et que les six corps auxquels nous avons donné des noms par anticipation soient admis à l'existence, il faut : 1° que chacune des distances 23, 34, 45, 56, ... ait la même valeur a que les distances 12, 13, 14, 15, ...; 2° qu'en portant une figure pareille à s successivement sur chacun des points 2, 3, 4, ... et puis sur chacun des nouveaux points libres qui apparaîtront, il se constitue un tout continu, se fermant sur lui-même pour circonscrire une certaine région de l'étendue. La première condition revient à une petite question de géométrie fixant la distance entre le point s et l'espace E. Nous verrons comment la seconde se réalise pour les polyédroïdes qui ont cinq, huit, seize ou vingt-quatre cases; pour les deux autres, le tâtonnement qu'elle exige n'est pas sans difficulté, et nous le laissons à la sagacité du lecteur; il en trouvera deux formes différentes, mais peu clairement exposées l'une et l'autre, dans Stringham et dans Hoppe.

Nous considérons donc la morphologie comme terminée, et nous passons à la métrique, dont le problème peut s'énoncer comme ceci : mettre les sommets en position dans un système quelconque de référence. La solution consiste, soit en des *tableaux numériques* où sont inscrites les valeurs des coordonnées de chaque point, soit en des *dessins* sur lesquels on peut les mesurer. Il faut toujours passer par les premiers, et souvent arriver aux seconds, qui se prêtent généralement avec plus de facilité aux diverses études du géomètre. Nous emploierons un peu chaque chose, de manière à donner une idée de l'une et l'autre. Nous écourterons beaucoup, ménageant toutefois la vue d'ensemble, mais n'évoquant que des détails, ou plus simples ou plus topiques, que nous nous efforcerons de mettre en clarté. Notre travail ne remplace donc ni le Mémoire de Puchta, ni les Monographies publiées récemment par M. Schoute, M. Van Oss et M^me^ Stott; en revanche, nous croyons qu'on ne trouverait ni dans ceux-ci, ni ailleurs, la plupart des considérations présentées ici.

Ces publications sont consacrées surtout au C^{600}, et contiennent de belles épures qu'on peut caractériser en disant que celles de la première sont des projections sur des espaces ou des intersections par des espaces, celles de la seconde des projections sur des

plans suivant les principes de la Géométrie descriptive (§ 25); celles de la troisième, des rabattements et développements sur des espaces. Disons quelques mots de chacun des trois procédés (1).

1° La projection du polyédroïde sur un espace est un polyèdre qui aura généralement un nombre moindre de sommets et d'arêtes. On peut le construire en fils de fer, en plâtre ou en carton, et l'on peut en donner une idée par des projections planes. Ces polyèdres sont intéressants à deux points de vue. Sans nous *faire voir* la forme même des polyédroïdes, nous avons dit pourquoi dans l'Avant-propos et au § 25, ils donnent cependant à notre curiosité une certaine satisfaction, toute platonique qu'elle soit. Ensuite ils constituent, dans la Géométrie à trois dimensions, une grande famille naturelle de polyèdres, qui ne sont pas réguliers au sens étroit donné à ce mot dans le § 38, mais qui viennent se placer à côté des *solides d'Archimède,* des *polyèdres demi réguliers* de M. Catalan (2) et des polyèdres de la cristallographie.

2° D'après ce qu'on a vu (§ 25), le polyédroïde est entièrement défini par ses projections sur deux plans *complètement perpendiculaires entre eux,* et celles-ci se représentent dans les angles opposés

$$x_1 0 x_2 \quad \text{et} \quad x_3 0 x_4, \qquad \text{ou} \qquad x_2 0 x_3 \quad \text{et} \quad x_4 0 x_1$$

de deux lignes perpendiculaires entre elles $x_1 x_3$ et $x_2 x_4$ (*voir* la figure du § 25). De ces projections on peut déduire aisément celles sur deux plans associés aux précédents par *perpendicularité simple;* on a alors quatre couples de projections

$$x_1 0 x_2 \quad \text{et} \quad x_2 0 x_3, \qquad x_2 0 x_3 \quad \text{et} \quad x_3 0 x_4, \quad \ldots$$

---

(1) Les épures de M. Van Oss sont surtout faites en vue d'une question que nous n'aborderons pas : celle des *groupes de rotations qui ramènent un polyédroïde régulier sur lui-même.*

(2) M. Catalan appelle ainsi : soit un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers, ceux de même espèce égaux entre eux, et dont les angles solides sont égaux ou symétriques; soit un polyèdre dont les faces sont égales et dont les angles solides sont réguliers, ceux de même espèce égaux entre eux. Il y en a quinze de chaque espèce.

On peut voir le Mémoire de M. Catalan dans le 41e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* et la collection des modèles en plâtre de ses polyèdres au Conservatoire des Arts et Métiers.

dont chacun détermine un espace et y représente un polyèdre; celui-ci, dans le système de la Géométrie descriptive ordinaire, n'est pas autre qu'une projection spatiale comme celles dont il est question dans l'alinéa précédent. Ayant les quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de chaque point, ces dernières constructions reviennent à les associer par deux dans l'angle voulu, comme le fait la Géométrie analytique à deux dimensions.

3° Enfin, pour faire le développement, on rabat sur l'espace d'une des cases limitantes chacune de celles qui l'entourent, puis les suivantes, au moyen de rotations (§ 18) sur les plans des faces de contact; il faut admettre que les cases se détachent les unes des autres par dédoublement de ces faces, et que les arêtes et les sommets se résolvent de même suivant leur degré de multiplicité.

Il faut considérer, dans les six corps qui vont défiler devant nous, certaines lignes remarquables qui s'appellent:

les premières diagonales, ou les *diagonales proprement dites* [1],
les deuxièmes diagonales,
les troisièmes diagonales,
les quatrièmes diagonales, qu'on appelle aussi *les axes*,

et qui joignent respectivement

deux sommets opposés,
les milieux de deux arêtes opposées,
les centres de deux faces opposées,
les centres de deux cases opposées.

Dans le C^5 il n'y a que les lignes de la deuxième et de la troisième espèce.

Les espaces menés par le centre perpendiculairement à quelques-unes de ces lignes sont des *espaces de symétrie*. C'est le cas (nous nous contentons d'énoncer ces propositions) pour ceux perpendiculaires, — dans le C^8, à une quatrième ou à une troisième diagonale, — dans le C^{16}, à une première ou à une

[1] Les auteurs allemands réservent le mot *diagonale* pour les lignes de la première espèce, et emploient le mot *transversale* (*Querlinie*) pour les autres, qui sont ainsi *les premières, les deuxièmes* et *les troisièmes transversales*.

deuxième, — dans le C^{24}, à une première ou à une quatrième, — dans le C^{600}, à une première, — dans le C^{120}, à une quatrième.

§ 41. — L'octaédroïde, ou le C^8.

D'après ce qu'on a vu au § 24, la formule

$$(1) \qquad x_1 = \pm\frac{1}{2}a, \quad x_2 = \pm\frac{1}{2}a, \quad x_3 = \pm\frac{1}{2}a, \quad x_4 \pm = \frac{1}{2}a,$$

en y combinant les signes de toutes les manières possibles, donne seize systèmes différents, de quatre équations chacun, et représente seize points. Nous désignerons ces points par les seize premiers nombres comme le montre le Tableau suivant :

	$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$2x_4$
1	$+a$	$+a$	$+a$	$+a$
2	$+a$	$+a$	$+a$	$-a$
3	$+a$	$+a$	$-a$	$-a$
4	$+a$	$+a$	$-a$	$+a$
5	$+a$	$-a$	$+a$	$+a$
6	$+a$	$-a$	$+a$	$-a$
7	$+a$	$-a$	$-a$	$-a$
8	$+a$	$-a$	$-a$	$+a$

	$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$2x_4$
11	$-a$	$-a$	$-a$	$-a$
12	$-a$	$-a$	$-a$	$+a$
9	$-a$	$-a$	$+a$	$+a$
10	$-a$	$-a$	$+a$	$-a$
15	$-a$	$+a$	$-a$	$-a$
16	$-a$	$+a$	$-a$	$+a$
13	$-a$	$+a$	$+a$	$+a$
14	$-a$	$+a$	$+a$	$-a$

Nous savons déjà (§ 39) que sur ces seize sommets s'agencent :

32 arêtes, se réunissant par quatre à chaque sommet,

24 faces, qui sont des carrés, se réunissant par six à chaque sommet et par trois sur chaque arête,

8 cases, qui sont des hexaèdres, se réunissant par trois à chaque sommet et par trois également sur chaque arête.

Il nous reste à montrer comment se fait cet agencement; pour cela, nous emploierons successivement la méthode géométrique et la méthode analytique, celle-ci procédant par *espaces coordonnés,* celle-là par *plans de projection,* chacune interprétant et complétant l'autre. L'une donne des *projections planes,* l'autre des *projections spatiales.*

I — Méthode géométrique.

La première et la deuxième colonnes du Tableau ci-dessus nous

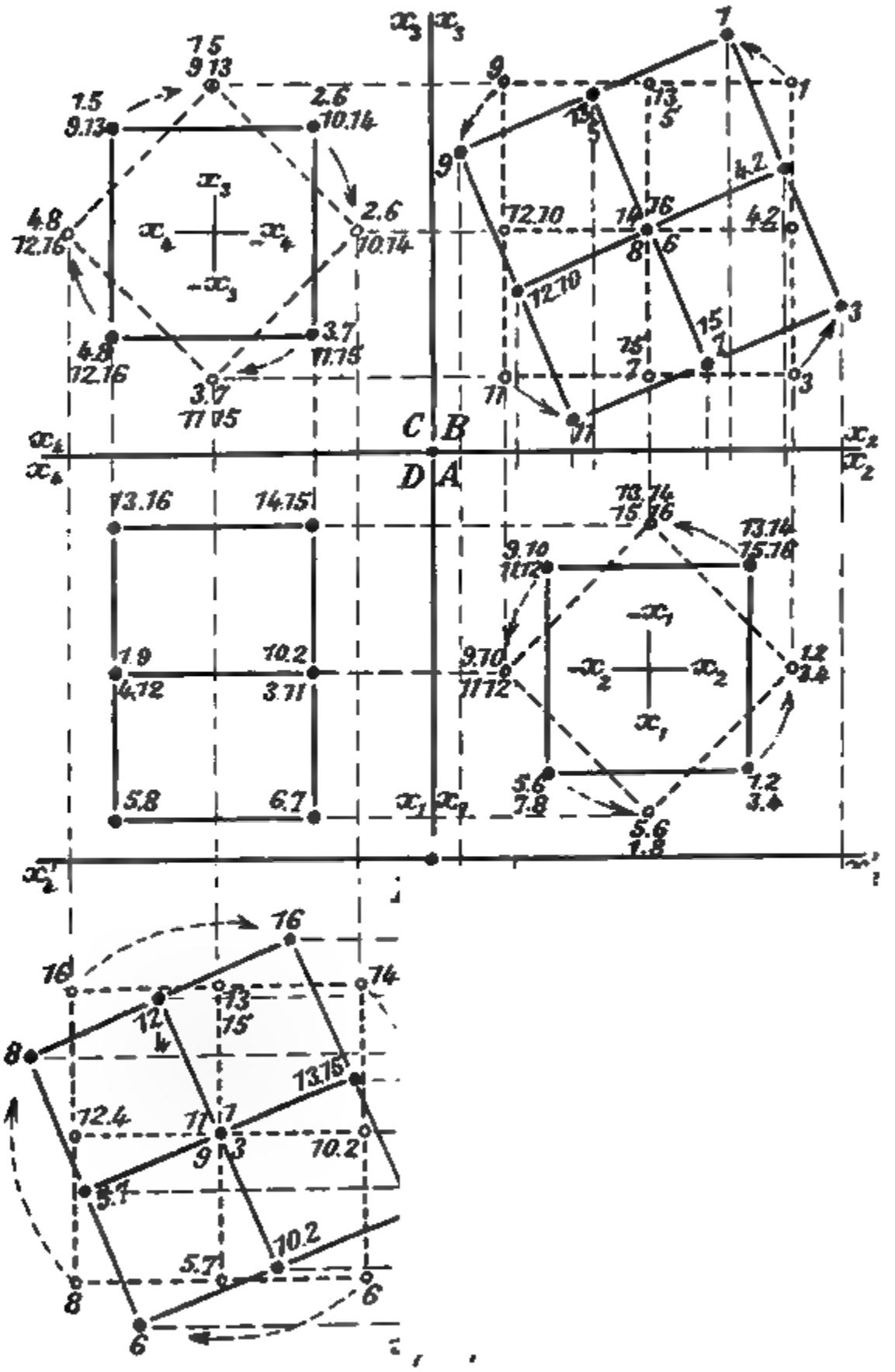


Fig. 23. — Diverses projections de l'octaédroïde, ou C^6.

donnent immédiatement, comme projection sur le plan des $x_1\, x_2$, c'est-à-dire dans le compartiment A de la figure 23, le carré qui est dessiné avec des traits pleins et des points noirs, et dont les côtés sont parallèles aux axes. Les quatrième et cinquième colonnes donnent un carré pareil dans le compartiment C. Les

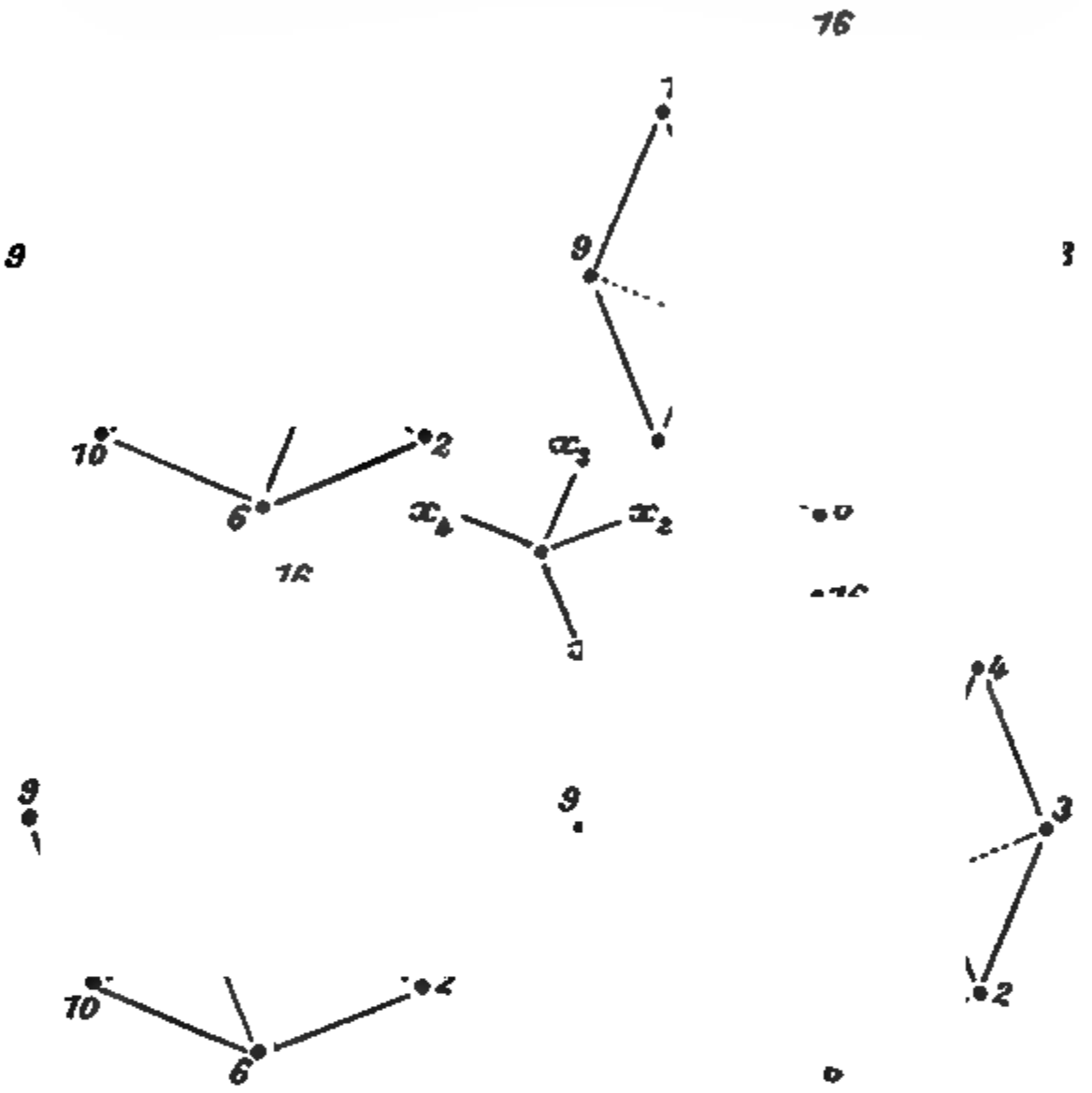


Fig. 24. — Les huit cases hexaédrales qui limitent l'octaédroïde.

quatre axes de l'hypercorps, que nous désignerons par a, b, c, d, sont parallèles, dans cette position, aux quatre axes coordonnés.

Que le lecteur veuille bien porter son attention sur le sommet inférieur droit du premier carré, qui porte les numéros 1, 2, 3, 4 et que nous reproduisons en a dans la figure 25; ce que nous en dirons s'appliquera à un quelconque des sept autres sommets. En ce point sont réunies les projections de quatre points de l'hypercorps, qui ne peuvent être autre chose que les sommets d'une des vingt-quatre faces carrées, située dans un plan complètement

perpendiculaire au plan de projection A. Nous nous proposons de *séparer* ces projections les unes des autres en faisant pirouetter l'hypercorps devant les plans de projection, suivant le principe des rotations donné au § 25.

1° Faisons-le tourner d'un quart de quadrant autour d'un plan mené par son centre parallèlement au plan $x_3\,x_4$; la projection sur celui-ci ne change pas et, dans le plan $x_1\,x_2$, le carré prend la position, perpendiculaire aux bissectrices des axes, dessinée en *points blancs* et traits interrompus; la projection sur le plan

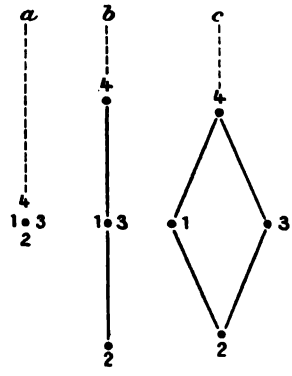


Fig. 25. — Transformations de la projection d'un carré.

$x_1\,x_4$, qui s'obtient comme il est dit au § 25, et que nous avons figurée en C bien que nous n'ayons pas à en faire usage, serait alors composée de six points et sept lignes formant les côtés et la médiane d'un rectangle allongé dans le sens de x_1. Pour cette forme, *deux* axes *a* et *b* sont perpendiculaires au plan de projection, les deux autres lui sont inclinés à 45°.

2° Imprimons une deuxième rotation d'un quart de quadrant autour d'un plan parallèle à celui des $x_1\,x_2$. Le résultat précédent se produit alors sur le plan $x_3\,x_4$, et les axes *a*, *b*, *c*, *d* font maintenant *tous les quatre* un angle de 45° avec chacun des deux plans de projection (1); les quatres axes coordonnés sont des *troi-*

(1) Si *trois* axes font un angle de 45° avec le plan de projection, le quatrième lui étant perpendiculaire, on a une projection *à contour hexagonal,* que le lecteur peut obtenir en construisant dans A un rectangle pareil à celui de D, puis faisant tourner l'un des deux d'un tiers de quadrant pour déduire une projection sur A.

sièmes diagonales. Avec ces deux figures, construisons les projections sur les deux autres plans coordonnés $x_2\,x_3$, $x_4\,x_1$, en descendant la partie DA du dessin en D'A' pour ne pas superposer des dessins. Nous avons sur chacun d'eux un carré avec ses deux médianes, dessiné en traits interrompus et points blancs, comprenant neuf points et douze lignes. Les projections 2 et 4 sont maintenant séparées de 1 et 3 (*fig.* 25^b), mais ces dernières sont encore confondues ensemble.

3° On voit qu'il est indifférent de considérer la rotation, ou sur l'hypercorps lui-même, ou sur les projections, l'un des deux mouvements ayant l'autre pour conséquence; dès lors, nous ne parlerons plus guère que des projections, dont la considération est plus facile. Partant des dernières que nous venons d'obtenir, faisons-les tourner, comme l'indiquent les flèches, de trois quarts de quadrant, et construisons la figure correspondante dans le compartiment A'. Les sommets 1 et 3 sont maintenant séparés (*fig.* 25^c) : la projection s'est ouverte comme un quadrilatère articulé, et la ligne droite est devenue un losange, comme le point était devenu une ligne droite. La même chose s'est passée en même temps pour tous les autres sommets, et toutes les projections sont séparées : leur ensemble forme une figure régulière à pourtour octogonal, sur laquelle on peut voir, enchevêtrées les unes dans les autres, mais distinctes (*fig.* 23, A') :

α. Les projections des vingt-quatre faces, qui sont : huit carrés, ayant chacun un côté commun avec ce pourtour; huit losanges, ayant chacun avec lui un sommet commun; huit autres losanges ayant chacun avec lui deux côtés consécutifs communs.

β. Les projections des huit cases hexaédrales; comme leur enchevêtrement est un peu plus compliqué, nous les avons séparées en quatre groupes de deux, et avons représenté ceux-ci à part dans la figure 23. Sont réunis ensemble deux cubes situés dans deux espaces parallèles, aux extrémités de chaque axe; et l'on peut considérer l'octaédroïde comme engendré par l'un d'eux, par exemple celui $x_4 = -a$, marchant parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il se confonde avec le second $x^4 = +a$. Dans ce mouvement, chaque sommet du cube engendre une arête de l'octaédroïde, chaque arête en engendre une face, et chaque face une

case hexaédrale; chaque position intermédiaire du cube générateur est la section de l'hypercorps par l'espace correspondant.

Les huit cases se voient encore, sous des formes différentes, dans les figures 26 et 27; nous empruntons la première au Mémoire de *Kempe* sur la *Forme géométrique* (1); elle a été comparée (2) à la *perspective de l'intérieur d'un cube vu à travers une de ses faces.* Cette figure 26, où la génération de l'octaédroïde est rapprochée de celle des configurations correspon-

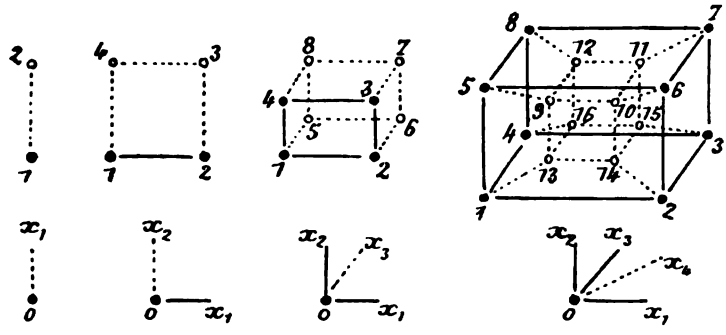


Fig. 26. — Génération de l'octaédroïde.

dantes dans les champs à trois, deux et une dimensions, est la projection de l'hypercorps sur un plan avec lequel ses *quatre premières diagonales* font chacune un angle de 45°.

En chiffres, les huit hexaèdres sont donnés par le Tableau suivant :

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8	1.5. 9.13.2.6.10.14
5. 6. 7. 8. 9.10.11.12	2.6.10.14.3.7.11.15
9.10.11.12.13.14.15.16	3.7.11.15.4.8.12.16
13.14.15.16. 1. 2. 3. 4	4.8.12.16.5.9.13. 1

II. — Méthode analytique.

Si nous récrivons le système (1), p. 118, en omettant les trois

(1) *A Memoir on the theory of mathematical Form* (*Philos. Transactions*, Vol. CLXXVII, 1887).

(2) Proctor Hall, *The projection of fourfold figures upon a Three-flat* (*American Journal of Math.*, vol. XV, 1893).

symboles (x), $(=)$ et $\left(\frac{1}{2}a\right)$, qui se répètent toujours les mêmes et ne font qu'apporter un encombrement inutile, il prend la forme

$$(2) \qquad (\pm\pm\pm\pm),$$

et celle-ci nous mène de la manière suivante à la constitution de l'hypercorps.

1° *Les cases.* — Supprimons *une fois* l'alternative des deux signes; nous pouvons le faire de huit manières différentes, savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} (\pm\pm\pm+), & (\pm\pm+\pm), & (\pm+\pm\pm), & (+\pm\pm\pm), \\ (\pm\pm\pm-), & (\pm\pm-\pm), & (\pm-\pm\pm), & (-\pm\pm\pm). \end{cases}$$

Chacune représente un système de huit points, et les huit systèmes sont situés respectivement dans les espaces

$$x_4=+\frac{1}{2}a, \quad x_3=+\frac{1}{2}a, \quad x_2=+\frac{1}{2}a, \quad x_1=+\frac{1}{2}a,$$

$$x_4=-\frac{1}{2}a, \quad x_3=-\frac{1}{2}a, \quad x_2=-\frac{1}{2}a, \quad x_1=-\frac{1}{2}a;$$

ce sont les sommets des huit cases hexaédrales; on voit qu'elles sont placées perpendiculairement aux bouts opposés de quatre axes perpendiculaires entre eux, de longueur a.

2° *Les faces.* — Ensemble les huit cases ont $6\times 8=48$ faces, mais chacune de celles-ci est commune à deux cases, ce qui réduit le nombre effectif à 24. Pour voir analytiquement ces contacts, il n'y a qu'à associer successivement chacun des huit symboles (3) avec chacun des autres, excepté celui où le signe unique $+$ ou $-$ occupe la même place. Par exemple, le premier ne s'associe pas avec le quatrième, mais il s'associe avec chacun des six autres et donne :

Avec le second

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\pm\frac{1}{2}a \\ x_2&=\pm\frac{1}{2}a \end{aligned}\right\}, \qquad x_3=+\frac{1}{2}a, \qquad x_4=+\frac{1}{2}a,$$

qui est un carré dans le plan $x_3=+\frac{1}{2}a$, $\quad x_4=+\frac{1}{2}a$;

Avec le troisième

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \pm \tfrac{1}{2} a \\ x_3 &= \pm \tfrac{1}{2} a \end{aligned}\right\}, \qquad x_2 = + \tfrac{1}{2} a, \qquad x_4 = + \tfrac{1}{2} a,$$

qui est un carré dans le plan $x_2 = \frac{1}{2} a$, $x_4 = + \frac{1}{2} a$; ... etc.

On voit aisément que le nombre de ces associations est $\frac{8 \times 6}{2} = 24$.

3° *Les arêtes.* — Ensemble les 24 faces ont $24 \times 4 = 96$ côtés, comme les huit cubes en ont $8 \times 12 = 96$, même nombre; mais chacun de ces côtés est commun à trois faces et à trois cubes, ce qui donne seulement $8 \times 4 = 32$ pour le nombre effectif des arêtes. En effet, réunissons trois des symboles (3) dans lesquels le signe unique + ou — ne soit pas à la même place. Par exemple, avec le premier et le second

$$(\pm \pm \pm +) \quad \text{et} \quad (\pm \pm + \pm),$$

nous pouvons prendre: soit le troisième $(\pm + \pm \pm)$, ce qui nous donne une ligne passant par les deux points

$$x_1 = \pm \tfrac{1}{2} a, \qquad x_2 = + \tfrac{1}{2} a, \qquad x_3 = + \tfrac{1}{2} a, \qquad x_4 = + \tfrac{1}{2} a;$$

soit le quatrième $(+ \pm \pm \pm)$, ce qui nous donne une ligne passant par les deux points

$$x_1 = + \tfrac{1}{2} a, \qquad x_2 = \pm \tfrac{1}{2} a, \qquad x_3 = + \tfrac{1}{2} a, \qquad x_4 = + \tfrac{1}{2} a;$$

soit le septième $(\pm - \pm \pm)$, et soit enfin le huitième $(- \pm \pm \pm)$; cela fait quatre droites.

Si, au lieu de commencer avec le premier et le deuxième, nous commençons avec deux autres quelconques, nous aurons en tout $8 \times 7 \times 4$ droites, mais alors chaque symbole aura servi sept fois, de sorte qu'il n'y a en tout que $8 \times 4 = 32$ arêtes.

4° *Les sommets.* — Enfin les 32 arêtes ont ensemble 64 extrémités, dont une, par exemple, est

$$x_1 = \pm \tfrac{1}{2} a, \qquad x_2 = \pm \tfrac{1}{2} a.$$

On verra sans peine que chaque extrémité est commune à quatre arêtes, à six faces, à trois cases, et que leur nombre 64 ne fait en réalité que seize sommets.

En résumé, les huit cubes limitants sont limités eux-mêmes par 24 carrés, chacun commun à deux d'entre eux; les carrés sont limités par 32 lignes, chacune commune à trois carrés; les lignes enfin sont limitées par 64 points, chacun aux extrémités de quatre lignes.

La projection de l'octaédroïde sur l'espace $x_4 = 0$ est le cube

$$(\pm\pm\pm),$$

ou, en développant,

$$x_1 = \pm\frac{1}{2}a, \qquad x_2 = \pm\frac{1}{2}a, \qquad x_3 = \pm\frac{1}{2}a.$$

L'on peut dire que ce sont deux cubes coïncidents; si l'espace de projection est parallèle à une face seulement, au lieu de l'être à une case, ils se séparent, et la projection consiste en deux cubes parallèles, avec des droites joignant les sommets qui se correspondent.

Voici comment on peut obtenir la projection sur un espace quelconque, déterminé de position relativement à l'hypercorps, mais pouvant toujours être supposé le nôtre, pourvu qu'une pareille supposition ne soit jamais faite en même temps pour deux ou plusieurs espaces à la fois. Cherchons la projection sur un espace perpendiculaire à une première diagonale.

Les premières diagonales sont (§ 40) les lignes qui joignent deux sommets placés sur la même ligne dans les deux parties du Tableau de la page 118. Elles se divisent en deux groupes formant deux quadrièdres droits pareils entre eux, savoir

$$6-16,\ 3-9,\ 1-11,\ 8-14 \quad \text{et} \quad 2-12,\ 4-10,\ 5-15,\ 7-13;$$

nous choisirons le premier pour en faire un nouveau système de coordonnées $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$.

La tranformation des coordonnées se fait, comme dans la Géométrie à trois dimensions, en projetant successivement, sur chaque coordonnée y d'un point donné, le contour polygonal formé par les quatre coordonnées anciennes x. Dans le cas

actuel, celles-ci ne sont autre chose que quatre arêtes consécutives de l'octaédroïde et sont projetées par des angles égaux à 45° ou à 135° ; les formules de transformation sont :

$$2y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$
$$2y_2 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$
$$2y_3 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4,$$
$$2y_4 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4,$$

et il en résulte les valeurs contenues dans le Tableau suivant :

	$2y_1$	$2y_2$	$2y_3$	$2y_4$
1	0	0	$+2a$	0
2	$+a$	$+a$	$+a$	$-a$
3	0	$+2a$	0	0
4	$-a$	$+a$	$+a$	$+a$
5	$+a$	$-a$	$+a$	$+a$
6	$+2a$	0	0	0
7	$+a$	$+a$	$-a$	$+a$
8	0	0	0	$+2a$

	$2y_1$	$2y_2$	$2y_3$	$2y_4$
11	0	0	$-2a$	0
12	$-a$	$-a$	$-a$	$+a$
9	0	$-2a$	0	0
10	$+a$	$-a$	$-a$	$-a$
15	$-a$	$+a$	$-a$	$-a$
16	$-2a$	0	0	0
13	$-a$	$-a$	$+a$	$-a$
14	0	0	0	$-2a$

Pour avoir l'intersection de l'hypercorps par l'espace $y_4 = 0$ il

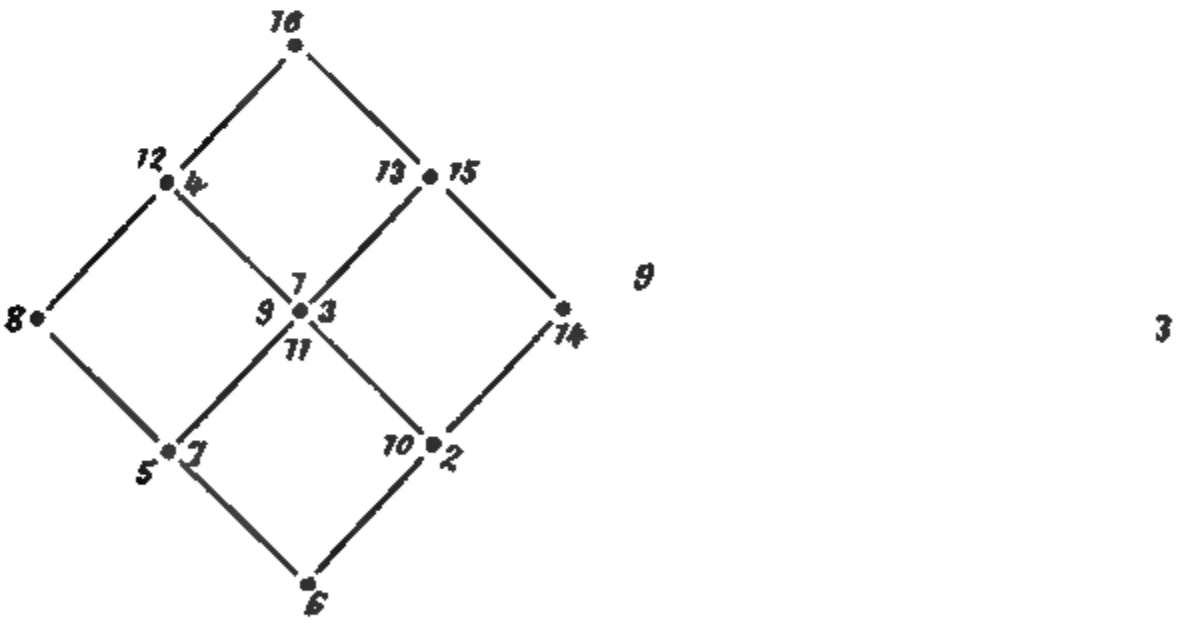


Fig. 27. — L'octaédroïde, traversé par notre espace perpendiculairement à une diagonale.

faut prendre les lignes du Tableau où il y a un *zéro* dans la colonne $2y_4$. Cela donne les points 1, 3, 6, 11, 9, 16, lesquels ont pour coordonnées

$$\begin{array}{ll} 0, 0, +2a, & 0, 0, -2a, \\ 0, +2a, 0, & 0, -2a, 0, \\ +2a, 0, 0, & -2a, 0, 0, \end{array}$$

et forment un *octaèdre;* celui-ci a été dessiné dans la figure 27 en traits mixtes et soulignés de hachures.

Pour avoir la projection sur l'espace $y_4 = 0$, il faut supprimer la colonne $2y_4$. Cela donne un polyèdre qui n'est autre chose que celui appelé *rhombododécaèdre* en Cristallographie. Ce solide a seize sommets et douze faces, qui sont des rhombes, d'où vient son nom ; il peut être décomposé soit en un octaèdre et un cube, soit en deux parallélépipèdes; on en trouvera la description dans les Traités de Cristallographie, par exemple celui de de Lapparent.

Nous avons établi les projections planes et spatiales de l'octaédroïde successivement sur trois systèmes de coordonnées formés respectivement par des quatrièmes, des troisièmes et des premières diagonales. Est laissé de côté le cas des deuxièmes diagonales, lesquelles joignent les milieux de deux arêtes opposées; nous nous contenterons de dire que ces lignes, au nombre de seize, peuvent être combinées ensemble de huit manières différentes pour former un quadrièdre droit.

§ 42. — L'hexadécaédroïde, ou le C^{16}.

L'hexadécaédroïde correspond à l'octaèdre comme l'octaédroïde au cube. Portez la longueur $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ sur *trois* axes rectangulaires de chaque côté de l'origine, joignez aux quatre autres points les deux qui ont été marqués sur un des axes, vous aurez les six sommets et les douze arêtes de l'octaèdre dont l'arête a la longueur a. Portez la même longueur $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ sur *quatre* axes rectangulaires de chaque côté de l'origine; joignez aux six autres points les deux qui ont été marqués sur un des axes; vous aurez les huit sommets

et les vingt-quatre arêtes de l'hexadécaédroïde dont l'arête a la longueur a.

D'après cela, en posant, pour abréger, $\alpha = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$, les huit sommets ont les coordonnées qu'indique le Tableau suivant :

SOMMETS.	COORDONNÉES			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	$+\alpha$	0	0	0
2	0	$+\alpha$	0	0
3	0	0	$+\alpha$	0
4	0	0	0	$+\alpha$
5	$-\alpha$	0	0	0
6	0	$-\alpha$	0	0
7	0	0	$-\alpha$	0
8	0	0	0	$-\alpha$

Comme on l'a vu (§ 39), les 24 arêtes aboutissent six par six à chaque sommet, et seize cases tétraédrales se réunissent par quatre sur chaque arête, par huit à chaque sommet. Laissant de côté tout autre point de doctrine, nous nous attacherons uniquement à faire comprendre de notre mieux cette constitution.

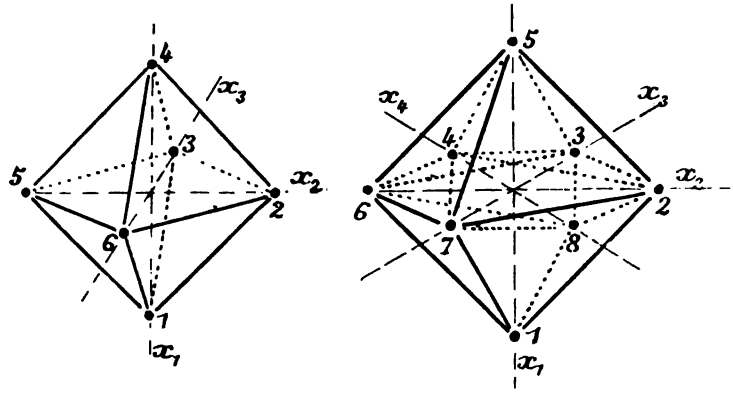


Fig. 28 (¹). — L'octaèdre et l'hexadécaédroïde.

(¹) Le lecteur est prié d'ajouter à la figure de droite les lignes pointillées 13, 14, 58.

Les deux dernières colonnes du Tableau donnent (*fig.* 29) la projection de l'hypercorps sur le plan des $x_3\,x_4$; c'est le carré dessiné en traits pleins; ses sommets 3, 4, 7, 8 sont les projections des sommets de même nom du corps, et son centre est la projection commune des quatre autres sommets de celui-ci; les quatre côtés du carré sont les projections de quatre des arêtes du corps; chacune des quatre demi-diagonales est la projection de

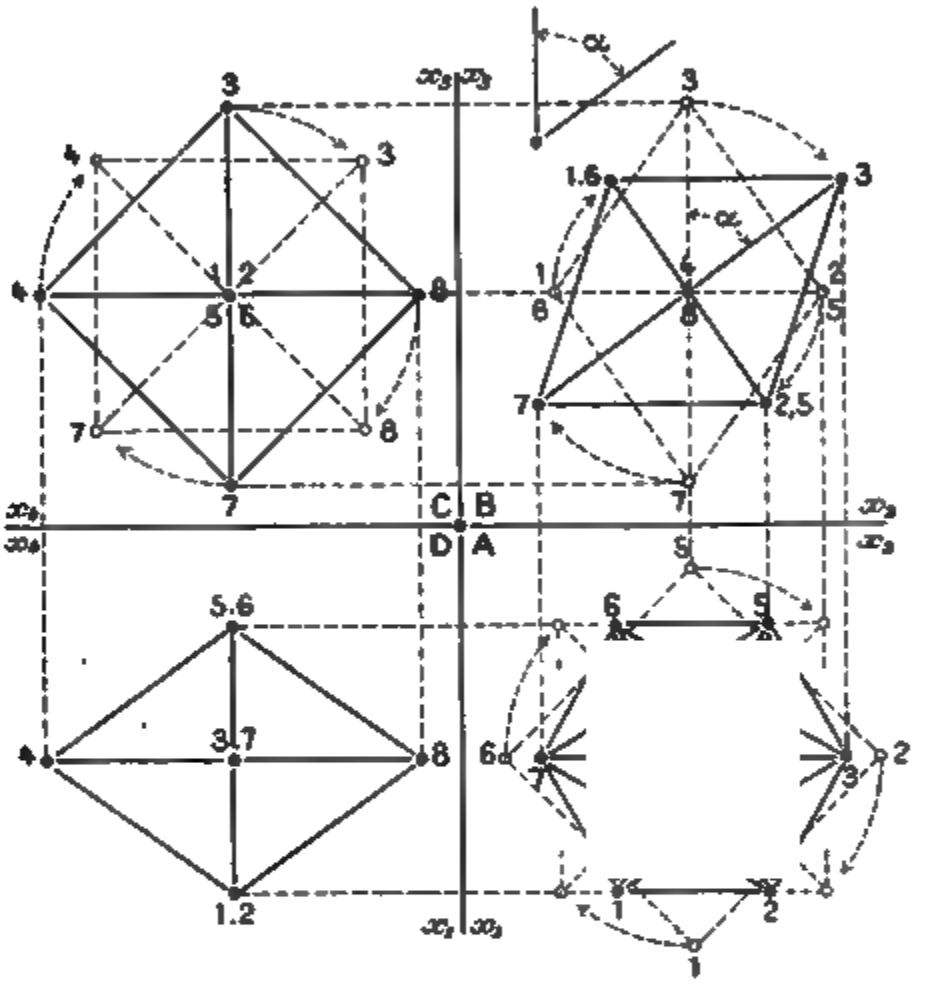


Fig. 29. — Diverses projections planes du C^{16}.

quatre arêtes; enfin le centre est la projection de quatre arêtes 12 et 56, 16 et 25.

La projection sur le plan $x_1\,x_2$ est une figure pareille tracée en traits fins interrompus; sur celle-ci, ce sont les sommets 1, 2, 5, 6 qui forment le carré et 3, 4, 7, 8 qui forment le centre.

De ces deux premières figures nous pourrions déduire les projections analogues dans les deux autres angles B, D. Mais avant de procéder à la construction, faisons: 1° tourner la figure A de 45°, ce qui rend ses côtés parallèles aux axes; en l'associant avec la première position C nous avons, dans le compartiment D, le

losange $\overline{12}.8.\overline{56}.4$; c'est une projection sur un plan parallèle à deux deuxièmes diagonales; 2° tourn r la figure C de 45°, ce qui rend à leur tour ses côtés parallèles aux axes; en l'associant avec la première position A, nous avons, dans le compartiment B, le losange $3.2\overline{3}.7.\overline{16}$. Chacune de ces deux figures représente la projection de l'hypercorps sur un plan parallèle au plan bissecteur des précédents.

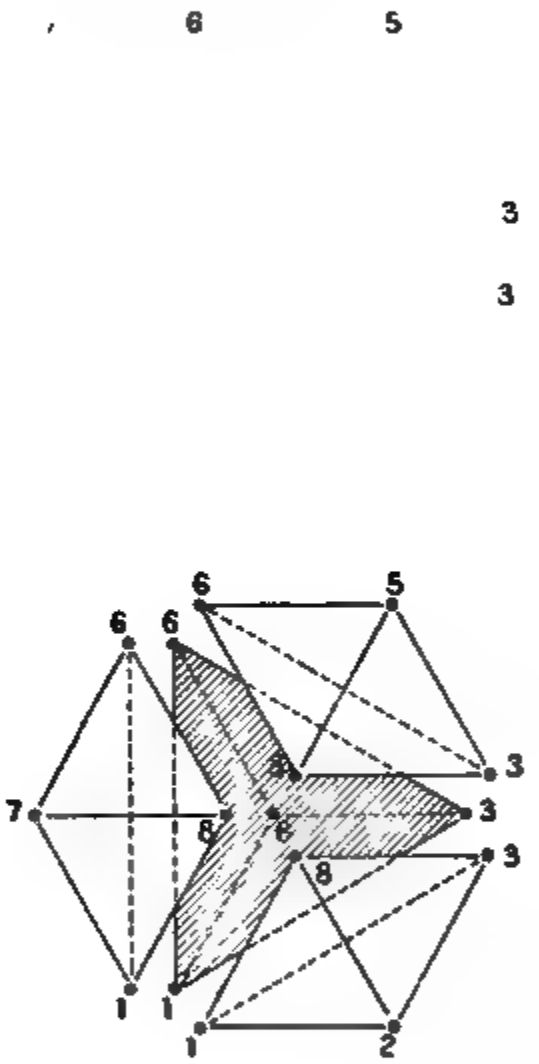


Fig. 30. — Le polyèdre AB.

Enfin, faisons tourner le losange du plan $x_3 x_3$ jusqu'à ce qu'un de ses côtés devienne parallèle à l'axe x_1. En l'associant alors avec le losange du plan $x_4 x_1$, nous avons, dans $x_1 x_2$, la figure hexagonale 1 2 3 5 6 7, à laquelle nous voulions arriver parce qu'elle va nous permettre de voir séparément chacun des seize tétraèdres; elle est la projection de l'hypercorps sur un plan parallèle à une de ses faces.

Associé avec le losange en traits pleins de l'angle B, la figure

hexagonale A définit et représente un corps à trois dimensions, que nous désignerons par AB, et qui est très voisin de l'octaèdre ayant pour sommets les points 1, 2, 3, 5, 6, 7. Il a un sommet de plus : le point 4-8 de la figure A, et six arêtes de plus : les lignes joignant ce point aux six sommets. Le point 4-8 est la projection commune de deux sommets de l'hypercorps sur l'espace AB; les six lignes qui en partent sont chacune la projection de deux arêtes sur le même espace; les autres sommets et arêtes ont des projections distinctes.

Le polyèdre AB se décompose en douze tétraèdres dont chacun est la projection de deux des cases tétraédrales qui limitent l'hexadécaédroïde. En les écartant un peu les unes des autres, on forme les quatre figures 30, dont chacune montre quatre de ces cases; nous pensons que, par ce moyen, le lecteur se rendra aisément compte de leur agencement par arêtes et par sommets. Ces seize cases sont :

1234,	1238,	1274,	1278;
5234,	5238,	5274,	5278;
1634,	1638,	1674,	1678;
5634,	5638,	5674,	5678.

Le cube que représente la figure 31 ci-après est la projection de l'hexadécaédroïde sur un espace parallèle aux cases 1234 et 8567 : des quatorze autres cases, six ont pour projection les six faces du cube, et les six autres les figures

1235, 1246, 1347, 1567, 2348, 2568, 3578, 4678.

§ 43. — Le pentaédroïde, ou le C^5.

Pour établir le pentaédroïde, nous allons mettre en équations la construction géométrique donnée au § 39, II, à laquelle se rapporte la figure 16.

Considérons un premier tétraèdre régulier, que nous appellerons le *tétraèdre fondamental,* et dont nous désignerons les sommets par 1, 2, 3, 4. Comme il convient de donner aux coordonnées des valeurs numériquement aussi simples que possible, plaçons ce tétraèdre dans un cube (*fig.* 31) où ses arêtes opposées 12, 34

soient les *diagonales contraires de deux faces opposées,* et plaçons

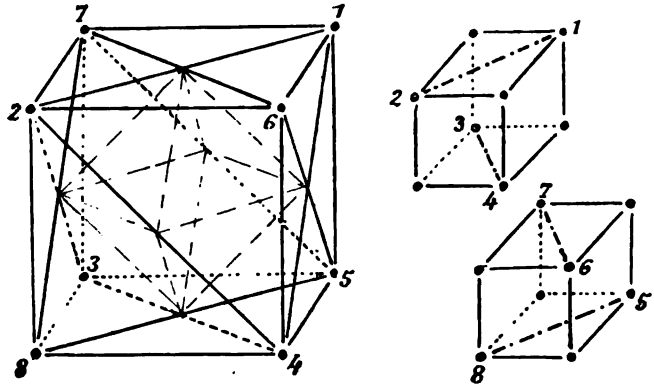


Fig. 31. — *Stella octangula* de Képler (1).

(1) Voici le développement de la figure 31 et la manière de la construire. Faire (*fig.* 32) un tétraèdre fermé en collant la languette *a* sous (*a*) et la languette *b* sous (*b*); puis appliquer successivement les diagonales des cases 5, 4, 3, 2 respectivement sur les arêtes 9.10, 9.7, 7.8, 8.10 de ce tétraèdre; alors

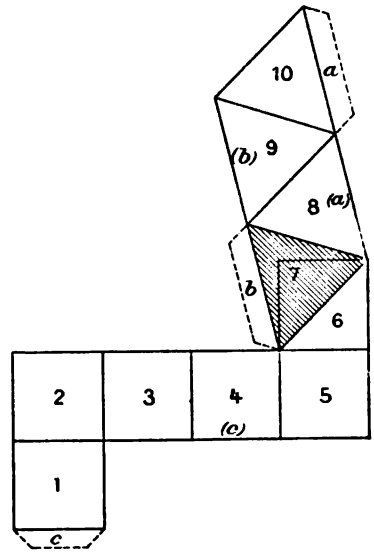


Fig. 32. — Tétraèdre inscrit dans un cube.

il ne reste plus en l'air que la face 1, servant de couvercle, ou pouvant être fixée aussi au moyen de la languette *c* collée sur 4.

le cube lui-même dans l'espace $x_4 = 0$ en prenant dans celui-ci, pour axe des $x_1\ x_2\ x_3$, trois lignes parallèles à ses arêtes.

Le tétraèdre 1 2 3 4 s'appelle, en cristallographie, l'*hémigonie* du cube, et il est l'*hémiédrie* de l'octaèdre qui aurait pour sommets les centres des six faces de celui-ci. Avec son tétraèdre conjugué 8567 il forme un solide à huit pointes que Képler appelait *stella octangula*.

L'arête du cube a pour valeur

$$\alpha = \frac{a}{2\sqrt{2}},$$

et les quatre sommets du tétraèdre fondamental ont pour coordonnées

$$(1)\quad \begin{cases} \text{le point } 1 : & x_1 = +\alpha, & x_2 = +\alpha, & x_3 = +\alpha, & x_4 = 0, \\ \text{» } 2 : & +\alpha, & -\alpha, & -\alpha, & 0, \\ \text{» } 3 : & -\alpha, & -\alpha, & +\alpha, & 0, \\ \text{» } 4 : & -\alpha, & +\alpha, & -\alpha, & 0, \end{cases}$$

et nous avons à exprimer que le point 5, en lequel se réunissent les deux points marqués 5 de la figure 15, se trouve à la distance a de chacun des points 1, 2, 3, 4. A cet effet, désignons par y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées inconnues de ce point, et par

$$(15)^2 \qquad (25)^2 \qquad (35)^2 \qquad (45)^2$$

ce que devient l'expression

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2,$$

quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 successivement par

la première, la deuxième, la troisième, la quatrième

ligne du Tableau (1). La condition dont il s'agit fournit alors ce système de quatre équations à quatre inconnues y

$$(15)^2 = a^2, \qquad (25)^2 = a^2, \qquad (35)^2 = a^2, \qquad (45)^2 = a^2,$$

et si l'on pose encore, pour abréger,

$$\beta = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\, a = \alpha\sqrt{5} = \alpha \times 2{,}236,$$

on en tire presque instantanément :

$$(1') \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = \beta.$$

En joignant ces valeurs aux valeurs (1) nous formons le Tableau des coordonnées des sommets, savoir :

	x_1	x_2	x_3	x_4
1	$+\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	0
2	$+\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0
3	$-\alpha$	$-\alpha$	$+\alpha$	0
4	$-\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	0
5	0	0	0	β

Détaillons encore la constitution du corps; il a :

cinq cases limitantes : 1234, 1235, 1245, 1345 et 2345;
dix faces : 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245 et 345;
dix arêtes : 12, 23, 34, 13, 14, 24, 35, 15, 25, 45;
cinq sommets : 1, 2, 3, 4, 5.

Au sommet 1 (ce serait pareil pour chacun des autres) aboutissent

quatre arêtes : 12, 13, 14, 15;
six faces : 123, 124, 125, 134, 135, 145;
quatre cases : 1234, 1235, 1245, 1345;

les quatre arêtes portent chacune trois cases, savoir :

12 : 1234, 1235, 1245; 13 : 1234, 1235, 1345; 14 : 1234, 1245, 1345; 15 : 1235, 1245, 1345,

elles ont deux à deux deux cases communes :

12 et 13 :	13 et 14 :	14 et 15 :	15 et 12 :
1234	1234	1245	1235
1235	1345	1345	1245

et trois à trois une case commune :

12, 13, 14 : 1234; 13, 14, 15 : 1345; 14, 15, 12 : 1245.

Tel est le pentaédroïde. La figure 33 en montre quelques projections planes obtenues suivant les mêmes principes que dans les cas précédents. Les figures dessinées en traits pleins dans les angles A et C sont celles que fournit immédiatement le Tableau des coordonnées : ce sont les projections sur des plans parallèles

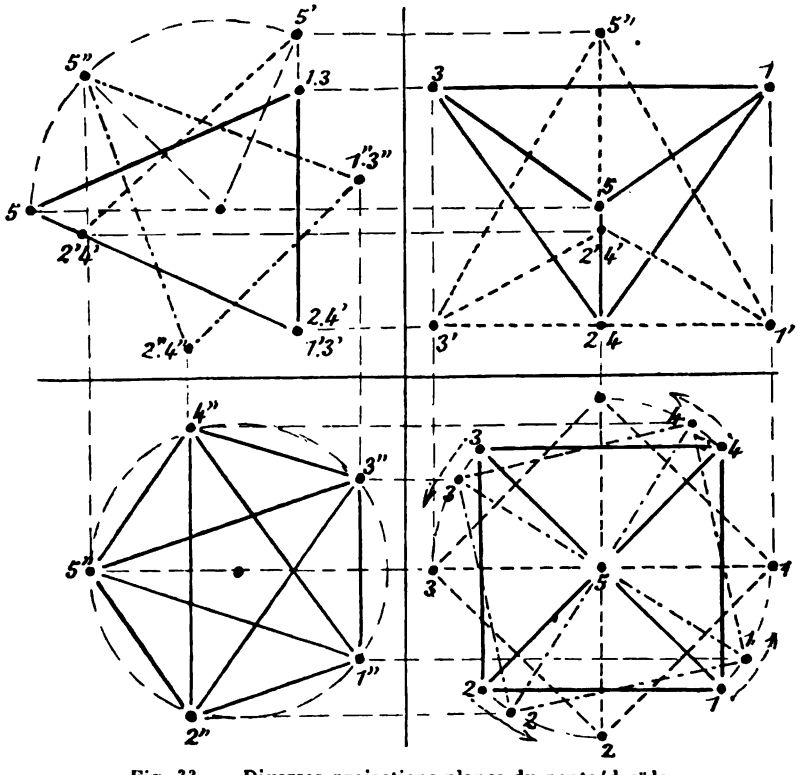


Fig. 33. — Diverses projections planes du pentaédroïde.

à deux faces du cube circonscrit. La figure en traits interrompus de l'angle B est la projection sur un plan parallèle à une face, et celle en traits interrompus de l'angle A, la projection sur un plan parallèle à deux arêtes opposées.

Quant à la projection du pentaédroïde sur un espace, c'est un corps qui s'obtient en joignant les quatre sommets d'un tétraèdre à un cinquième point, soit intérieur, soit extérieur, suivant les cas; on a quelques-unes de ces projections en associant les figures correspondantes des angles A et B, ou B et C, ou C et D, ou D et A.

L'hypervolume de l'octaédroïde est a^4; celui de l'hexadécaédroïde est $\frac{1}{8}a^4$. M. Schoute a donné (1) celui du pentaédroïde en fonction des coordonnées des sommets. En le considérant comme une *pyramide* qui aurait pour *base* le tétraèdre 1 2 3 4 et pour *hauteur* la longueur de la perpendiculaire abaissée du point 5 sur l'espace 1 2 3 4, on peut déduire de la formule de M. Schoute que *cet hypervolume est égal au volume de la base multiplié par la hauteur et divisé par* 4, *c'est-à-dire par le degré du champ.* C'est le même énoncé qui donne le volume du tétraèdre lui-même, le degré du champ étant alors 3, et celui du triangle, le degré du champ étant 2.

Pour les cas de *quatre* et *cinq* tétraèdres (*fig.* 17 et 18, § 39), on opérera comme nous l'avons fait au début de ce Paragraphe, et ainsi de proche en proche sur chaque nouvelle arête obtenue « jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus », dit Puchta, auquel nous avons emprunté ce petit calcul pour donner une idée de sa méthode. Avec quatre tétraèdres, on retrouve l'icosatétraédroïde, qui a fait l'objet du Paragraphe précédent; avec cinq, on a l'hexacosiédroïde, qui fera l'objet du § 47; avec six, ou davantage, on trouverait des valeurs *imaginaires*.

§ 44. — L'icosatétraédroïde, ou le C^{24}.

Nous arrivons au troisième cas du § 39, celui où la case constitutive est un octaèdre régulier (*fig.* 28). Nous désignerons ce solide à trois dimensions en écrivant à la file les trois sommets d'une face quelconque, puis les sommets correspondants de son opposée. Par exemple

1 2 3. 4 5 6

désigne un octaèdre dont les diagonales (qui sont des lignes ne faisant pas partie du corps) sont

14, 25, 36.

---

(1) *Sur les types de cristaux du système régulier de l'espace à quatre dimensions* (*Ass. fr. p. l'avanc. des Sciences; Congrès de Bordeaux*, 1895).

On les écrit en sautant deux chiffres chaque fois dans le symbole 123.456.

Pour avoir les huit faces de cet octaèdre il n'y a qu'à écrire successivement, suivant une loi facile à apercevoir :

$$\begin{array}{cccccccc} 123, & 234, & 345, & 456, & 561, & 612, & 135, & 246, \\ a & b & c & a & b & c & d & d \end{array}$$

les faces soulignées des mêmes lettres étant parallèles entre elles. Pour avoir les douze arêtes, il faut prendre d'abord deux sommets opposés quelconques, par exemple 1 et 4, puis écrire

$$12,\ 13,\ 15,\ 16;\ 42,\ 43,\ 45,\ 46;\ 23,\ 35,\ 56,\ 62.$$

La projection plane de l'octaèdre comporte régulièrement *douze* lignes. Pour éviter l'encombrement, nous en supprimerons souvent quelques-unes, mais nous conserverons toujours au moins celles qui forment *le pourtour de la projection,* au nombre, tantôt de six, tantôt de quatre, quand la projection de l'octaèdre lui-même ne se réduit pas à un simple fragment de droite.

L'octaèdre régulier d'arête a est déterminé de position dans l'étendue quand on connaît quatre de ses sommets.

I. Appliquant la méthode de Puchta, nous avons à réunir sur une même arête 23 trois octaèdres

$$\alpha = 123.645, \qquad \beta = 123.987, \qquad \gamma = 236.11\ 10\ 7,$$

dont α et β ont en commun le triangle 123, β et γ le triangle 237, γ et α le triangle 236. Nous supposons connus les sommets du premier; pour avoir le second et le troisième il suffit, puisque trois de leurs points sont déjà fixés, savoir 1, 2 et 3 pour celui-là, 2, 3 et 6 pour celui-ci, de chercher un quatrième point de chacun d'eux : ce sera le point 7, qui leur est commun. Soient y_1, y_2, y_3, y_4 ses coordonnées.

La figure 34 représente les trois octaèdres α, β, γ, avant et après la réunion (1), laquelle se fait sur l'arête 23; les triangles communs à α et β, β et γ, γ et α, sont couverts de hachures, incli-

(1) Le lecteur remarquera les formes que prennent ces projections de l'octaèdre régulier, faites sur un plan non situé dans le même espace que lui.

nées pour le premier, horizontales pour le second, verticales pour le troisième.

Comme toutes les arêtes ont la longueur a et toutes les diagonales la longueur $a\sqrt{2}$, les distances 27, 37, 17, 67 doivent, après la réunion, être égales, les deux premières à a, et les deux dernières à $a\sqrt{2}$.

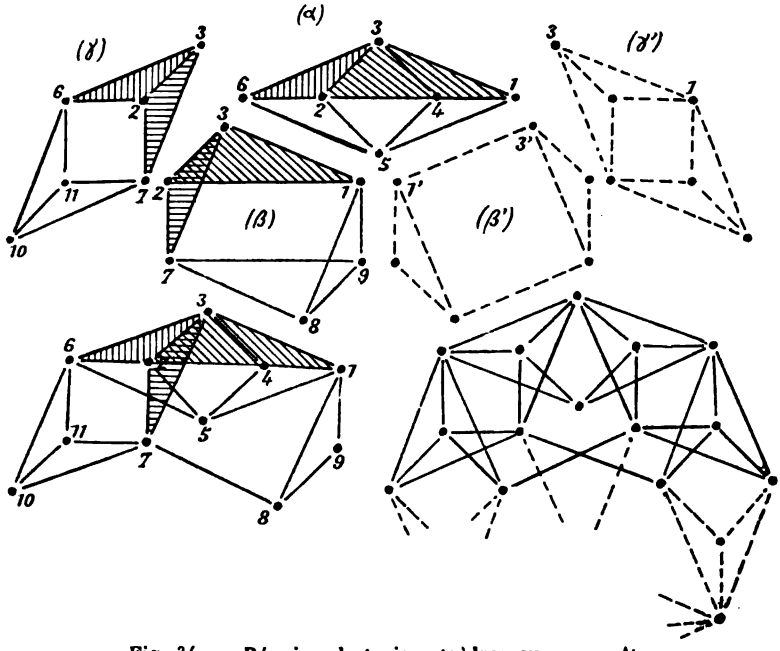


Fig. 34. — Réunion de trois octaèdres sur une arête.

On a donc

$$(1) \qquad \overline{27}^2 = a^2, \quad \overline{37}^2 = a^2, \quad \overline{17}^2 = 2a^2, \quad \overline{67}^2 = 2a^2,$$

les premiers membres de ces équations désignant respectivement ce que devient l'expression

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4, successivement par les coordonnées des points 2, 3, 1, 6. Ces équations, au nombre de quatre pour quatre inconnues, font connaître le point 7 et la position des deux octaèdres β, γ est déterminée. On en placera de la même

manière deux autres β', γ', et voici ce que l'on trouvera en continuant ainsi.

Prenons six points, que nous désignerons par les numéros 1, 2, 8, 9, 10, 18; et posant toujours

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}.a,$$

attribuons pour coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 :

au point	1	les valeurs	$0, 0, +\alpha, +\alpha,$
»	2	»	$0, +\alpha, +\alpha, 0,$
»	8	»	$0, -\alpha, +\alpha, 0,$
»	9	»	$+\alpha, 0, +\alpha, 0,$
»	10	»	$-\alpha, 0, +\alpha, 0,$
»	18	»	$0, 0, +\alpha, -\alpha.$

Ces points *forment un octaèdre d'arête a*, comme le montrent leurs projections (*fig.* 35) : les deux projections supérieures, B et C, constituées chacune par une simple ligne droite, indiquent que l'octaèdre est dans un espace parallèle au plan $x_1 x_2 x_3$, et les deux projections inférieures A, D, font ensemble une figure de géométrie descriptive ordinaire. Les points dont il s'agit sont extraits du Tableau suivant :

TABLEAU I. — LES VINGT-QUATRE SOMMETS.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$+\alpha$	0	$+\alpha$	$-\alpha$	0	0
x_2	0	$+\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	0	$+\alpha$	$+\alpha$
x_3	$+\alpha$	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$+\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	0	0
x_4	$+\alpha$	0	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$+\alpha$	$-\alpha$

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x_1	$-\alpha$	$+\alpha$	0	0	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	0	$+\alpha$	$-\alpha$
x_2	0	0	$-\alpha$	$-\alpha$	0	0	0	$+\alpha$	0	0	0	$-\alpha$
x_3	$-\alpha$	$-\alpha$	0	0	0	$+\alpha$	0	0	0	$-\alpha$	0	0
x_4	0	0	$-\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	0

En substituant ces six points à ceux désignés par 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans l'exposition précédente, et procédant comme il a été dit, le septième point fourni par le calcul fera également partie du

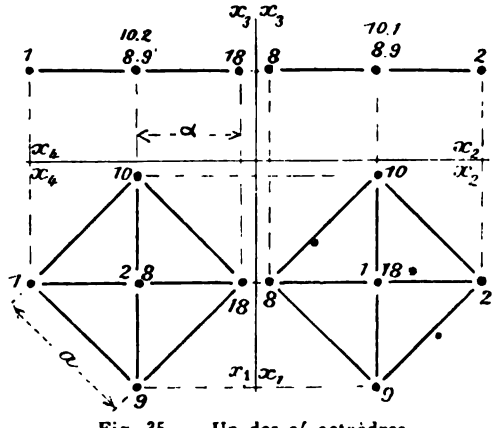


Fig. 35. — Un des 24 octaèdres.

Tableau; puis on verra apparaître successivement toutes les colonnes de celui-ci et, une fois qu'on en aura vingt-quatre, on retombera sur une des six prises comme point de départ. On aura formé vingt-quatre cases octaédrales, se tenant sans solution de continuité dans les conditions qu'exprime le Tableau de la page 104. De la multitude d'octaèdres que l'on peut former avec

TABLEAU II. — LES VINGT-QUATRE CASES OCTAÉDRALES.

	I.	II.	III.
1.....	1 2 10. 3 19 11	1 2 11.20 17 9	1 11 19.22 16 17
2.....	2 3 11. 4 20 12	2 3 12.21 18 10	2 12 20.23 9 18
3.....	3 4 12. 5 21 13	3 4 13.22 19 11	3 13 21.24 10 19
4.....	4 5 13. 6 22 14	4 5 14.23 20 12	4 14 22.17 11 20
5.....	5 6 14. 7 23 15	5 6 15.24 21 13	5 15 23.18 12 21
6.....	6 7 15. 8 24 16	6 7 16.17 22 14	6 16 24.19 13 22
7.....	7 8 16. 1 17 9	7 8 9.18 23 15	7 9 17.20 14 23
8.....	8 1 9. 2 18 10	8 1 10.19 24 16	8 10 18.21 15 24

les vingt-quatre points et d'associations que l'on peut faire avec ces octaèdres, une seule réalise cette condition; elle est donnée dans le Tableau II, disposé en *Tableau d'enchaînement,* de telle

sorte qu'on peut trouver presque à première vue les faces de contact, les arêtes communes, etc.

Nous désignerons chaque octaèdre en réunissant le numéro de sa colonne avec celui de sa ligne, ce dernier étant placé comme un exposant; par exemple II^2 sera l'octaèdre 2 3 12.21 18 10.

On remarquera que les vingt-quatre points du premier Tableau sont tous ceux dont deux coordonnées ont la valeur zéro et deux la valeur absolue α; le Tableau peut donc être condensé sous cette forme :

$$0, \pm\alpha, \pm\alpha, 0 : \quad \pm\alpha, 0, \pm\alpha, 0 : \quad \pm\alpha, \pm\alpha, 0, 0;$$
$$\pm\alpha, 0, 0, \pm\alpha; \quad 0, \pm\alpha, 0, \pm\alpha; \quad 0, 0, \pm\alpha, \pm\alpha.$$

On voit ainsi que les points ne se trouvent que sur les six plans du système de coordonnées; il y en a quatre dans chacun d'eux et ils sont sur les bissectrices des quatre angles droits en lesquels le partagent les deux axes qui le déterminent. C'est ce que nous appellerons *la division hexaédrale* de l'icosatétraédroïde. La répartition entre les six plans a lieu comme ceci :

3, 7, 20, 24 sont dans le plan des $x_1\ x_2$.
1, 5, 18, 22 ..... $x_3\ x_4$;
9, 10, 13, 14 ..... $x_1\ x_3$.
11, 12, 15, 16 ..... $x_2\ x_4$;
2, 4, 6, 8 ..... $x_2\ x_3$,
17, 19, 21, 23 ..... $x_4\ x_1$;

et il se forme de cette manière trois groupes naturels que nous retrouverons plus loin.

II. Construisons quelques projections du C^{24}.

1° D'après le Tableau I, les espaces

$$x_4 = \pm\alpha, \qquad x_3 = \pm\alpha, \qquad x_2 = \pm\alpha, \qquad x_1 = \pm\alpha$$

contiennent les octaèdres

III^1 et III^8, I^3 et I^4, I^2 et I^6, III^7 et III^1.

Il s'ensuit que les axes auxquels sont rapportées les coordonnées de ce Tableau sont les axes mêmes de l'hypercorps : des *quatrièmes diagonales*. Le Tableau fournit directement les projections sur les plans $x_1\ x_2$ et $x_3\ x_4$: ce sont (*fig.* 36) deux figures composées

Fig. 36. — Diverses projections de l'icosatétraédroïde.

chacune de douze lignes et de neuf points, formant le centre, les sommets, les milieux des côtés, les côtés et les médianes d'un carré parallèle aux axes; nous désignerons ces figures par leurs sommets, qui sont 24, 7, 20, 3 dans $x_1\,x_2$ ou A et 1, 22, 5, 18 dans $x_3\,x_4$ ou C. En déduisant les projections B, D comme nous l'avons déjà fait plus d'une fois, on aurait, par la réunion de AB, ou BC, ou CD, ou DA, les projections de l'hypercorps sur un espace perpendiculaire à une quatrième diagonale.

2° Faisons tourner les deux figures de 45°: dans cette deuxième position, les numéros des sommets sont affectés d'un accent, mais ceux des points intermédiaires n'ont pas été répétés. En revenant à l'hypercorps, celui-ci a maintenant ses quatre *premières diagonales* parallèles aux axes coordonnés. La figure représente donc les projections sur des plans parallèles à deux de ces lignes, et l'on en déduirait, comme dans 1°, celle sur un espace perpendiculaire à une d'elles.

En reportant les quatre projections sur un autre dessin (*fig.* 37),

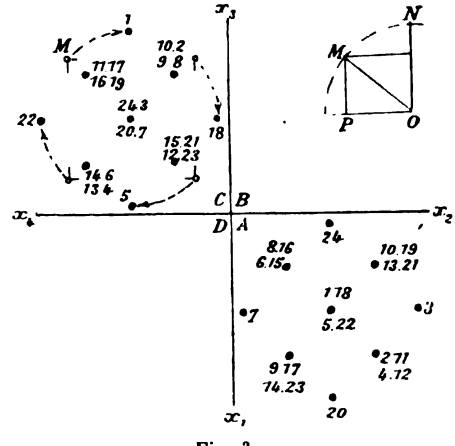


Fig. 37.

on voit plus commodément les trois groupes déjà signalés, savoir :

(a) 1, 3, 5, 7, 18, 20, 22, 24;

(b) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16:

(c) 2, 4, 6, 8, 17, 19, 21, 23;

le premier de ces groupes forme une figure identique aux

projections dessinées en traits interrompus dans l'angle A et en traits pleins dans l'angle C de la figure 29, page 131 ; l'ensemble des deux autres forme une figure identique aux deux projections dessinées en traits pleins dans les angles A et C de la figure 23, page 119. On a, d'autre part (*fig.* 37),

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = 2a^2,$$

d'où

$$ON = a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\sqrt{2} = a.$$

Les figures se correspondent donc pour la grandeur comme pour

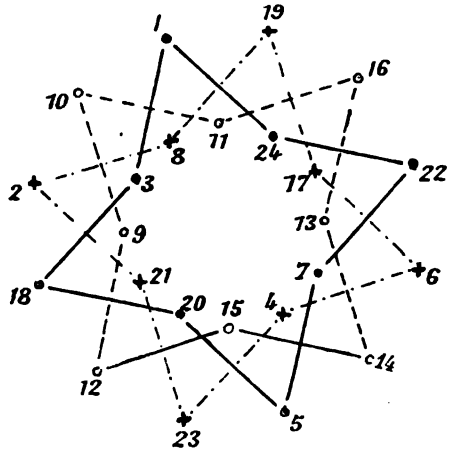


Fig. 38. — Les trois groupes de sommets.

la forme, et il en résulte ce remarquable théorème : *Sur les* 24 *sommets de l'icosatétraédroïde d'arête a, seize sont les sommets d'un octaédroïde d'arête a et les huit autres ceux d'un hexadécaédroïde d'arête* $a\sqrt{2}$. La décomposition peut se faire de trois manières, car il est facile de voir que chacun des trois groupes forme un C^{16} ; la figure 38, qui résulte de la projection B'' (*fig.* 36), montre la parfaite symétrie des trois groupes entre eux.

3° Associant le carré 24.7.20.3 de A avec 1'.22'.5'.18' de B, puis 24'.7'.20'.3' de A avec 1.22.5.18 de B, nous avons dans C et D deux figures que nous désignerons par leurs sommets oppo-

sés 7.3 et 24.20, lesquelles comprennent chacune onze points et 22 lignes, avec pourtour hexagonal pseudo-régulier. Si l'on note sur ces projections les points

1, 18, 5, 22, 24, 20, 3, 7,

on voit qu'ils forment des losanges identiques à ceux dessinés, l'un avec le grand axe vertical, l'autre avec le grand axe horizontal, dans les compartiments B, D de la figure 29; chacune de nos deux projections est donc faite sur un plan parallèle à deux deuxièmes diagonales d'un des trois C^{16} circonscrits.

4° Faisons tourner les carrés primitifs, non plus d'un demi-quadrant, mais seulement d'un quart de quadrant, ce qui leur donne les positions 24″ 7″ 20″ 3″ et 1″ 22″ 5″ 18″. Nous en déduisons dans B et D deux figures dont l'une a été reportée dans le haut de la feuille en B′, tandis que l'autre, de même forme, mais avec des numéros placés différemment, est supprimée. Dans ces figures, les projections des sommets sont placées par huit sur trois cercles concentriques.

5° Faisons tourner la figure hexagonale 73 de B de manière que ses côtés 7.6.14 et 3.10.12 deviennent parallèles à $x_1\, x_2$, puis combinons-la avec D. Nous aurons: dans C une figure de douze lignes et sept points formant un hexagone parfaitement régulier, qui a été portée parallèlement à elle-même en C′ au haut de la feuille; dans A, une autre figure à pourtour hexagonal pseudo-régulier, qui est dessinée dans l'angle A″ au bas de la feuille. Celle-ci est la projection du C^{24} sur le plan d'une face, celle-là sur un plan absolument perpendiculaire à une face.

6° Enfin, amenons les figures hexagonales 3.7 et 20.24 de B et D dans les positions 3″ 7″ et 20″ 24″; en les combinant ensuite, nous aurons deux figures où les projections des 24 sommets sont disposées par douze sur deux cercles concentriques; une de ces figures est en B″. Cette curieuse forme, comme la plupart des précédentes, a été mise au jour par M. Van Oss.

7° Les projections du C^{24} sur un espace perpendiculaire à une première, deuxième, troisième, quatrième diagonale sont des

polyèdres ayant respectivement

14, 14, 18, 12 sommets,
24, 30, 42, 24 arêtes,
12, 18, 26, 14 faces;

et ses sections par un espace pareillement placé passant par le centre sont des polyèdres ayant

14, 26, 18, 12 sommets,
24, 42, 30, 24 arêtes,
12, 18, 14, 14 faces. (SCHOUTE.)

L'icosatétraédroïde présente cette particularité intéressante qu'on peut le juxtaposer indéfiniment à lui-même et remplir à saturation l'étendue à quatre dimensions. Les centres de ces icosatétraédroïdes sont les sommets d'une suite infinie d'hexadécaédroïdes, qui remplissent aussi l'étendue sans vides.

Les milieux des 24 arêtes d'un C^{16}, comme les centres des 24 faces d'un C^{8}, sont les sommets d'un C^{24}.

§ 45. — Construction de l'icosatétraédroïde.

Nous voudrions maintenant, ainsi que nous l'avons fait dans les trois cas précédents, *construire* l'icosatétraédroïde, c'est-à-dire donner un corps géométrique à cet ensemble de points et d'octaèdres que définissent les Tableaux I et II du dernier paragraphe. C'est un nouvel effort qu'avec le lecteur nous tentons pour *saisir* l'hypercorps, et apprécier la distance qu'il y a de lui au polyèdre, encore plus grande que de celui-ci au polygone. Ce sera, en outre, un exercice de Géométrie descriptive à quatre dimensions, en vue duquel il nous faut rappeler les points suivants (1).

On a vu, dans le § 24, que les quatre espaces coordonnés partagent l'étendue en *seize* quadrièdres droits. Chacun de ceux-ci a quatre arêtes, qui sont une des seize associations quatre à quatre qu'on peut faire avec les six demi-axes; il a six faces planes, qui joignent les arêtes deux à deux. C'est ce point

(1) Le lecteur pourrait aussi, pour suivre plus commodément nos explications, se fabriquer quelques octaèdres en papier fort (de la carte à deux ou trois

de la constitution du quadrièdre droit qui amène dans la Géométrie à quatre dimensions un corps régulier n'ayant pas d'analogie dans celle à trois.

Dans le § 42 nous avons placé, sur chacun des huit demi-axes

$$\pm x_1, \quad \pm x_2, \quad \pm x_3, \quad \pm x_4,$$

et à la distance α de l'origine, un *point*. Ces huit points ont pu être réunis quatre à quatre par *seize* tétraèdres réguliers, dont chacun ferme, *comme un couvercle,* un des seize quadrièdres droits, et dont l'ensemble ferme complètement l'étendue autour de l'origine. C'est l'hexadécaédroïde.

Enfin, dans le § 41, nous avons placé, à la distance α de l'origine et perpendiculairement à chacun des huit demi-axes,

---

feuilles). Nous donnons (*fig.* 39) le développement qui sert à faire cette construction; *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sont des languettes qui doivent être fixées à la colle

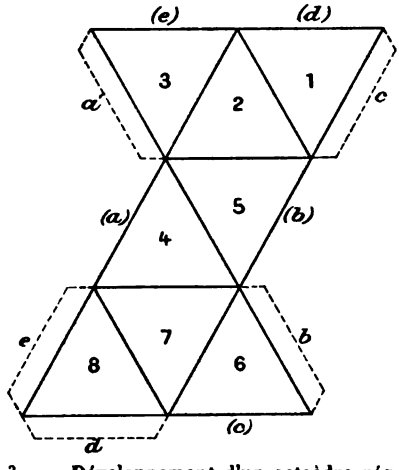


Fig. 39. — Développement d'un octaèdre régulier.

sous les endroits marqués par les mêmes lettres. Pour l'exécution : découper le pourtour, creuser les plis avec une pointe mousse, les briser; faire une pyramide avec les faces 2, 3, 4, 5 en laissant en l'air la face 1 et collant la languette *a* sous 4, coller *b* sous 5, venir à la face 1 et coller *c* sous 6; engager les deux languettes *d*, *e* de 8 sous 1 et 3; enfin numéroter les sommets. On maintient les languettes *a*, *b*, *c* en piquant chaque fois l'assemblage sur une planchette de bois tendre avec deux aiguilles emmanchées, et l'on ne passe à l'assemblage suivant que lorsque la colle a fait prise. La meilleure colle pour ce travail est celle de pâte de seigle et de gélatine blanche, très cuite et un peu épaisse.

un *hexaèdre régulier*. Ces huit hexaèdres, dont chacun a une face commune avec trois des autres, forment aussi un corps régulier fermé, qui a *seize* sommets, un dans chacun des seize quadrièdres droits; de chacun de ces sommets part une calotte de quatre arêtes et six faces, qui est aussi un quadrièdre droit, et qui s'appuie (§ 39) sur un des seize tétraèdres du corps précédent. C'est l'octaédroïde.

Le nombre *seize* va conserver le rôle important qu'il remplit dans ces premières constructions.

I. Considérons un des seize quadrièdres droits, par exemple celui qui, placé le dernier, est désigné par 4185 dans le Tableau de la page 66. Ses arêtes sont

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

et ses faces

$$x_1 x_2, \quad x_2 x_3, \quad x_3 x_4, \quad x_4 x_1, \quad x_1 x_3, \quad x_2 x_4,$$

toutes les lettres étant *affectées du signe* + *sous-entendu*. Or on voit : 1° par le Tableau I, que les sommets qu'elles contiennent sont respectivement

$$20, 17, 1, 2, 11, 9;$$

2° par le Tableau II, que ces sommets sont ceux de l'octaèdre II^1. On peut ainsi dresser le Tableau III, page 150, qui donne l'octaèdre inscrit dans chacun des seize quatrièdres droits, mais *ne le remplissant pas*.

Le Tableau est divisé en quatre parties. La première (nous appelons ainsi celle de l'angle supérieur droit) comprend quatre octaèdres,

$$I^1, \quad II^2, \quad III^3, \quad II^1,$$

formant ensemble un hypercorps que nous appellerons h_2 parce que le sommet 2 leur est commun; nous appellerons de même les trois autres h_4, h_6, h_8. Ils forment à eux quatre l'hypercorps H, de seize octaèdres. L'on remarque que, tandis que chacun des nombres 2, 4, 6, 8 se trouve quatre fois dans un même quartier du Tableau et ne se trouve que dans celui-là, les nombres 17, 19, 21, 23 se trouvent tous les quatre dans chaque quartier et n'y sont chacun qu'une fois. Il y a symétrie entre les deux groupes, et l'on pourrait remplacer le premier par le second en *ordonnant*

le Tableau par rapport à celui-ci. La symétrie apparaîtra non moins clairement dans les figures, où la place importante que

TABLEAU III. — LES SEIZE QUADRIÈDRES DROITS ET LEURS OCTAÈDRES.

h_8		h_2	
(2385) $-x_1-x_2+x_3+x_4$ $II^8 = 8\,1\,10.\,19\,24\,16$	(1285) $+x_1-x_2+x_3+x_4$ $I^1 = 8\,7\,16.\,1\,17\,9$	(4185) $+x_1+x_2+x_3-x_4$ $II^1 = 2\,1\,11.\,17\,20\,9$	(3485) $-x_1+x_2+x_3+x_4$ $I^1 = 2\,1\,10.\,19\,3\,11$
(2356) $-x_1-x_2+x_3+x_4$ $III^8 = 8\,10\,18.\,21\,15\,24$	(1256) $+x_1-x_2+x_3-x_4$ $II^1 = 8\,7\,9.\,23\,18\,15$	(4156) $+x_1+x_2+x_3-x_4$ $III^2 = 2\,12\,20.\,23\,9\,18$	(3456) $-x_1+x_2+x_3-x_4$ $II^2 = 2\,3\,12.\,21\,18\,10$
h_6		h_4	
(2367) $-x_1-x_2-x_3+x_4$ $II^3 = 6\,5\,15.\,21\,4\,13$	(1267) $+x_1-x_2-x_3-x_4$ $I^3 = 6\,5\,14.\,23\,7\,15$	(4167) $+x_1+x_2-x_3-x_4$ $II^1 = 4\,5\,14.\,23\,20\,12$	(3467) $-x_1+x_2-x_3-x_4$ $I^3 = 4\,3\,12.\,21\,5\,13$
(2378) $-x_1-x_2-x_3+x_4$ $III^6 = 6\,16\,24.\,19\,13\,22$	(1278) $+x_1-x_2-x_3+x_4$ $II^6 = 6\,7\,16.\,17\,22\,14$	(4178) $+x_1+x_2-x_3+x_4$ $III^4 = 4\,14\,22.\,17\,11\,20$	(3478) $-x_1+x_2-x_3+x_4$ $II^3 = 4\,3\,13.\,19\,22\,11$

prennent les quatre derniers nombres se trouve ainsi expliquée.

On remarque aussi que chaque octaèdre a une face commune avec quatre des autres : ce sont ceux occupant les quatre cases qui touchent la sienne par un côté, les colonnes de droite et de

gauche étant considérées comme se touchant par leur bord extérieur, et de même les rangées supérieure et inférieure; par exemple, pour l'octaèdre I^1 situé dans la première case, ce sont II^1 et II^8 situés dans les deuxième et quatrième cases de la première ligne, puis II^2 et II^3 situés dans les deuxième et quatrième cases de la première colonne. Il suit de là que, si l'on prend un quartier quelconque de quatre cases, chacun de ces quatres octaèdres tient au suivant, et le dernier au premier, *par une face*.

Ce théorème touche au point fondamental de la constitution des polyédroïdes; nous allons essayer de l'illustrer par des figures et, afin de donner à celles-ci un peu d'expression, nous appliquerons à quelques-unes la distinction, chère au dessinateur, en *parties vues* et *parties cachées*. Nous considérons comme vues, et nous dessinons en traits pleins, les lignes de la projection B qui, le corps étant dans la position qui donne cette projection, sont *au-dessus* de l'espace des quatre points 1, 18, 22, 5; nous considérons comme cachées, et nous dessinons en traits pointillés, celles qui sont *au-dessous* de cet espace. Les sommets

3, 6, 8, 10, 13, 15, 16, 19, 21, 24

sont dans le premier cas, et les sommets

2, 4, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 20, 23

sont dans le second.

Quant aux hachures qui couvrent certaines parties de nos figures, elles n'ont qu'une seule des diverses significations admises dans l'art du dessin : celle d'appeler l'attention sur ces parties ou de les distinguer des autres à un titre quelconque, généralement indiqué dans le texte. Elles ne sont pas autre chose que le *trait* par lequel, dans l'écriture, on souligne un ou plusieurs mots.

Nous mettrons, auprès de quelques figures, une *rose de directions* pour indiquer les positions qu'y prennent les *quatrièmes diagonales* formant le système d'axes auquel sont rapportées les coordonnées du Tableau I.

Ces conventions faites, voici l'explication des figures 39 à 44, qui sont l'expression graphique des Tableaux I, II, III, ou, si l'on aime mieux, dont ces Tableaux sont la formule numérique.

La figure 40 donne les projections A et C, B et D de l'hyper-

corps H; les deux premières, dont chacune a son plan perpendiculaire aux équateurs de huit octaèdres, se déduisent du Tableau I et fournissent les deux autres comme il est dit dans le Para-

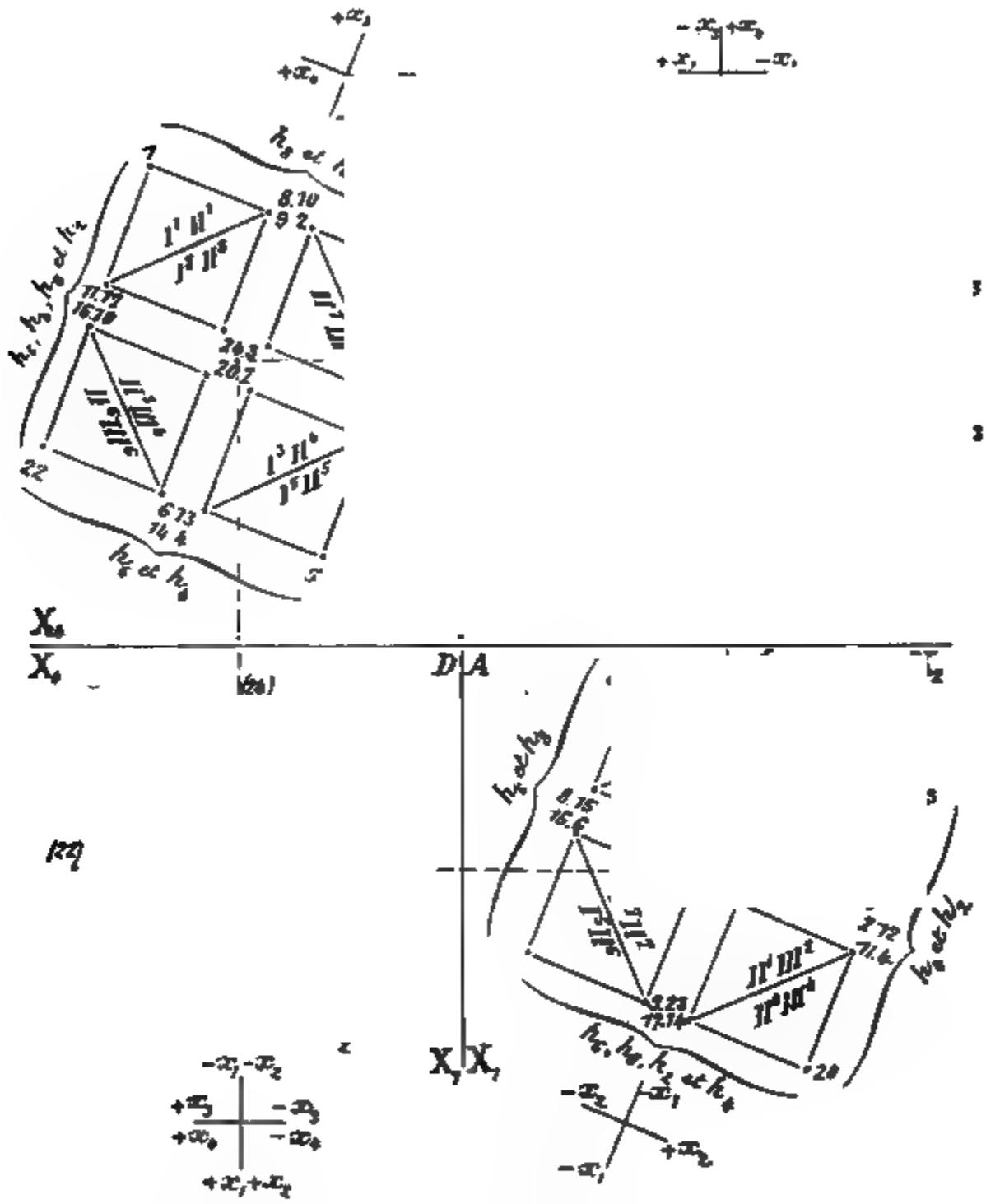


Fig. 40. — Projections planes des seize octaèdres fondamentaux.

graphe précédent. On voit, dans A et C, quatre carrés que nous avons un peu écartés les uns des autres une fois la construction faite; dans l'épure régulière, ils devraient se toucher, leurs quatre angles intérieurs coïncidant avec le point central de la figure. Les groupes de chiffres, qui sont, comme toujours, les

numéros des sommets correspondants de l'hypercorps, se rapportent également aux deux ou aux quatre points dont ils sont

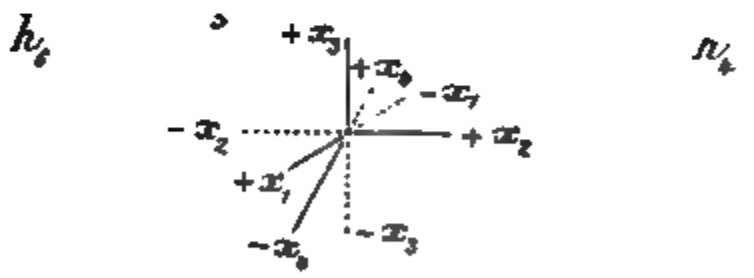


Fig. 41. — Perspective cavalière des seize octaèdres fondamentaux.

voisins; nous ne les avons écrits qu'une fois, et il appartient au lecteur de faire, le cas échéant, le triage des numéros se rapportant à l'un ou à l'autre de ces points. Chaque carré de A ou C,

avec son unique diagonale ne passant jamais par le centre, est la projection de quatre octaèdres, lesquels se projettent, dans la figure conjuguée C ou A, suivant quatre carrés différents : cela fait *seize combinaisons* qui sont *les seize octaèdres de* H. Associés par deux comme le montre la figure, les carrés donnent les quatre hypercorps partiels h_2, h_4, h_6, h_8.

Dans la projection B nous avons de même écarté ces quatre hypercorps les uns des autres. En opérant ces déformations, nous pensons obvier à la confusion que présente ce genre de figures, et qui résulte de la multiplicité des points et des lignes projetés les uns sur les autres, multiplicité venant elle-même de la *distance de deux champs* qu'il y a de l'objet au plan de projection, comme si l'on projetait *un polyèdre sur une droite*. Mais la correspondance graphique des points homologues se trouve ainsi détruite; si le lecteur voulait faire quelque construction géométrique, il devrait rétablir les figures partielles dans leur position en faisant : dans A et C, glisser les quatre carrés comme nous l'avons déjà dit; dans B, glisser les quartiers h de manière que les centres des quatre carrés 21, 19, 17, 23 coïncident ensemble.

Enfin, dans la projection D, on a mis l'hypercorps h_2 tout seul; on y a néanmoins marqué les autres sommets de H, au nombre de onze, en les entourant de parenthèses.

Dans B et D les parties ombrées sont deux faces du *cube* sur lequel (§ 39) porte la calotte du sommet 2, 4, 6 ou 8.

La figure 41 correspond en tous points à la projection B de la précédente; c'est une *perspective cavalière,* mode de représentation qui a été appliqué systématiquement aux corps de l'hyperespace, pour la première fois, par M. Schoute, tandis que celui des projections planes l'a été par M. Van Oss. On voit ici nettement deux propriétés importantes des quartiers h : 1° Toutes leurs faces ont un sommet en un des points

2, 4, 6, 8; 17, 19, 21, 23,

et le côté opposé à ce sommet est une des arêtes du cube

1	10	18	9.	11	3	12	20	pour h_2,
11	3	12	20.	22	13	5	14	» h_4,
22	13	5	14.	16	24	15	7	» h_6,
16	24	15	7.	1	10	18	9	» h_8.

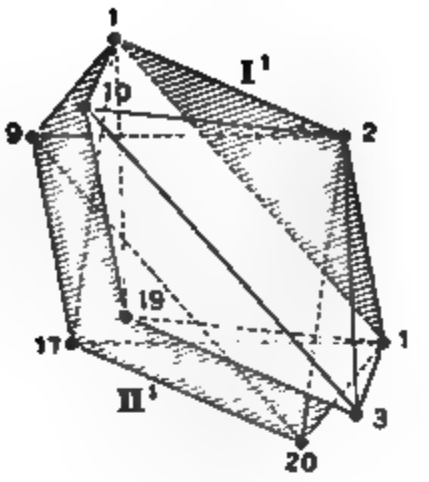


Fig. 42. — Les octaèdres $I^1 = 1\ 2\ 11\ .\ 3\ 10\ 19$ et $II^1 = 1\ 2\ 11\ .\ 9\ 17\ 20$.

Fig. 43. — Les octaèdres $II^1 = 2\ 9\ 20\ .\ 17\ 1\ 11$ et $II^2 = 2\ 9\ 20\ .\ 23\ 12\ 18$.

Fig. 44. — Les octaèdres $II^2 = 2\ 12\ 18\ .\ 23\ 9\ 20$ et $III^2 = 2\ 12\ 18\ .\ 21\ 10\ 3$.

Fig. 45. — Les octaèdres $III^2 = 2\ 3\ 10\ .\ 4\ 12\ 18$ et $I^2 = 2\ 3\ 10\ .\ 19\ 1\ 11$.

Figures 42 à 45. — Les couples d'octaèdres constituants de l'hypercorps h_4.

2° Les faces qui émanent des points 17, 19, 21, 23 sont communes à deux quartiers : h_2 et h_4, h_4 et h_6, h_6 et h_8, h_8 et h_2.

Si l'on prend à part le quartier h_2, on voit qu'il est formé par les quatres octaèdres

$$I^1 = 2\ 3\ 11.\ 19\ 1\ 10, \qquad II^1 = 2\ 1\ 11.\ 17\ 9\ 20,$$
$$III^2 = 2\ 12\ 20.\ 23\ 9\ 18, \qquad II^2 = 2\ 3\ 12.\ 21\ 18\ 10,$$

lesquels sont accolés ensemble

le premier et le second par la face commune		2 1 11,
le second et le troisième	»	2 9 20,
le troisième et le quatrième	»	2 12 18,
le quatrième et le premier	»	2 3 10 :

c'est la décomposition de H en quatre quartiers h qui se continue suivant les mêmes principes par celle de chacun de ces quartiers en quatre octaèdres. Et c'est ce qu'on a cherché à faire ressortir en représentant séparément (*fig.* 42 à 45) chacun des quatre couples d'octaèdres de h_2 au moyen de deux figures, dont l'une est une projection plane correspondant à la figure 39 B et dont l'autre est une perspective correspondant à la figure 40; chacune pouvant être considérée, suivant le point de vue auquel on voudra se placer, comme la traduction et l'explication de l'autre.

II. Accolez ensemble les quatre octaèdres

$$I^1,\ II^1,\ III^2,\ II^2$$

comme l'indiquent les figures 42 à 45, vous aurez h_2; composez de même h_4, h_6 et h_8; puis accolez ensemble ces quatre h comme l'indique la *fig.* 40, vous aurez sous les yeux l'*hypercorps* H. Vous lui verrez 32 faces *doublées par des juxtapositions* et 64 faces *simples;* les premières sont dans la condition normale du polyédroïde; les secondes forment (§ 36) les parois d'évidements polyédriques, sur lesquels notre attention doit maintenant se porter.

Il n'a été question jusqu'ici que de seize octaèdres sur les vingt-quatre du Tableau II. Les huit restants sont

$$III^7,\ I^3,\ I^8,\ III^1,\ III^3,\ I^6,\ I^4,\ III^5,$$

et ils se trouvent respectivement dans les espaces

$$x_1 = +\alpha, \quad x_2 = +\alpha, \quad x_3 = +\alpha, \quad x_4 = +\alpha,$$
$$x_1 = -\alpha, \quad x_2 = -\alpha, \quad x_3 = -\alpha, \quad x_4 = -\alpha.$$

Ils forment un deuxième hypercorps, qui n'a que des faces

TABLEAU IV. — LES TROIS HYPERPOLYÈDRES (A), (B), (C).

(A)

	III^6	I^2	I^1	III^2	III^4	I^7	I^5	III^8
III^6	»	21	10	18	»	8	15	24
I^3	21	»	3	12	4	»	5	13
I^1	10	3	»	2	11	1	»	19
III^2	18	12	2	»	20	9	23	»
III^4	»	4	10	20	»	17	14	22
I^7	8	»	1	9	17	»	7	16
I^5	15	5	»	23	14	7	»	6
III^8	24	13	19	»	22	16	6	»

(B)

	II^1	II^2	II^3	II^4	II^5	II^6	II^7	II^8
II^1	»	2	11	20	»	17	9	1
II^2	2	»	3	12	21	»	18	10
II^3	11	3	»	4	13	22	»	19
II^4	20	12	4	»	5	14	23	»
II^5	»	21	13	5	»	6	15	24
II^6	17	»	22	14	6	»	7	16
II^7	9	18	»	23	15	7	»	8
II^8	1	10	19	»	24	16	8	»

(C)

	III^1	I^2	I^6	III^4	III^3	I^8	I^4	III^5
III^1	»	20	9	17	»	7	14	23
I^2	20	»	2	11	3	»	4	12
I^6	9	2	»	1	10	8	»	18
III^4	17	11	1	»	19	16	22	»
III^3	»	3	10	19	»	24	13	21
I^8	7	»	8	16	24	»	6	15
I^4	14	4	»	22	13	6	»	5
III^5	23	12	18	»	21	15	5	»

simples, au nombre de $8 \times 8 = 64$, et que nous appellerons (C). On peut aisément se représenter chacun d'eux dans son espace, par exemple III^1 dans $x_4 = +\alpha$, en observant que ses six sommets sont sur les bissectrices des six angles droits que les six demi-axes $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$ font entre eux. On peut les écrire comme

le montre le Tableau IV (C), disposé à double entrée (¹). Chaque ligne ou colonne contient les six sommets de l'octaèdre inscrit dans sa première case, et l'intersection d'une ligne avec une colonne est un sommet commun à ces deux octaèdres. Pour les cases marquées d'un astérisque, les deux en-têtes portent, ou le même octaèdre, ce qui est le cas pour celles de la diagonale descendant de gauche à droite, ou deux octaèdres *diamétralement opposés*.

Chaque octaèdre a donc un sommet commun avec chacun des six autres, son opposé ayant été mis de côté. Les points d'attache successifs, en prenant les octaèdres dans l'ordre du Tableau, sont

20, 2, 1, 19, 24, 6, 5, 23, 20;

ils sont entourés d'un rond dans quelques-unes des figures ci-après.

Le Tableau contient les vingt-quatre numéros de 1 à 24, ce qui veut dire que le groupe des 24 sommets du C^{24} est déjà constitué par les huit octaèdres. C'est pour cela que les projections obtenues dans le présent paragraphe offrent la même apparence que celles du paragraphe précédent auxquelles elles correspondent; la différence entre les trois cas : C^{24}, H et (C), consiste simplement en ce que les points et les lignes de la projection, comparés à ceux de l'hypercorps, n'ont pas la même multiplicité.

Les projections des huit nouveaux octaèdres, représentées figure 46, ont des formes tout autres que celles des premiers. En A et C, elles consistent soit en une *ligne droite,* soit en un *carré avec ses quatre demi-diagonales;* quatre présentent le premier cas sur l'un des deux plans conjugués, et le second sur l'autre; sur chacun de ces plans, les quatre carrés n'en font qu'un, commun à quatre octaèdres. Pour plus de clarté, nous avons écarté un peu les *lignes* de leur position, marquée par quatre lignes pointillées formant un autre carré. En B et D, quatre octaèdres ont pour projection un *losange dans lequel est inscrit un carré,* par exemple 1 2 18 8 et 1 10 18 9, et les quatre autres un *carré dans lequel est inscrit un losange,* par exemple 18 12 5 15

(¹) On verra bientôt la signification des parties (A) et (B) du Tableau.

et 18 23 5 21. Les quatre figures de la première sorte forment, dans chaque plan, le pourtour de la projection, tandis que les quatre autres couvrent ensemble le grand carré 1 3 5 7 dans B, 18 20 22 24

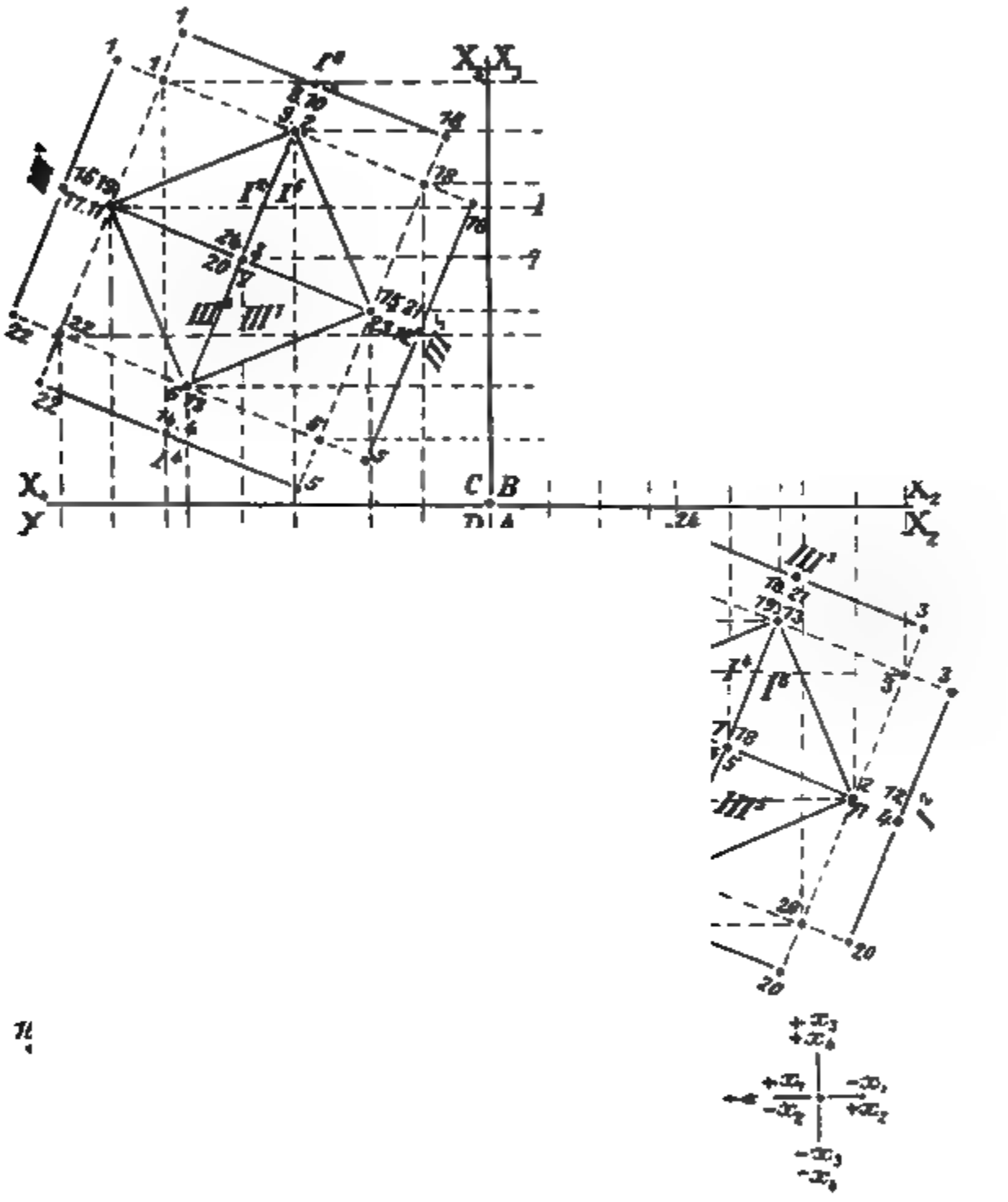


Fig. 46. — Projections planes des huit octaèdres complémentaires.

dans D, se recouvrant elles-mêmes par leurs coins sur le petit carré 18 20 22 24 dans B, 1 3 5 7 dans D. Nous n'avons détaillé le dessin que pour une figure de chaque sorte, laquelle est couverte

de hachures. Mais, pour la projection B, nous en avons transporté au bas de la page, à gauche le couple d'octaèdres III^1 et III^3, à droite le couple III^5 et III^7; le premier se trouve *dessous* et le second *dessus*.

Plus encore que dans le cas de H, la projection plane gagne à être traduite en perspective cavalière; c'est ce que nous avons fait figure 47, toujours pour B. Ici l'on voit bien les quatre octaèdres du pourtour I^2, I^4, I^6, I^8; un seul des quatre autres, III^5, a été figuré en place et les deux mêmes couples que ci-dessus, III^1 et III^3, III^5 et III^7 ont été dessinés séparément.

En regardant ces figures, la personne qui n'aurait pas suivi régulièrement notre exposition se demanderait sans doute comment un demi-axe, par exemple x_3, *traverse* l'octaèdre correspondant I^8, c'est-à-dire par quel point il y entre et par quel point il en sort : nous savons (§ 36) que ces deux points coïncident. La même personne pourrait aussi trouver insolites certaines formes de projections, et n'y reconnaîtrait pas un octaèdre régulier ou un cube. *Ces formes sont néanmoins correctes,* et il ne faut pas s'étonner que les résultats soient différents quand on projette les points d'une figure en opérant dans l'étendue au moyen de *plans projetants* ou dans un espace au moyen de *droites projetantes*.

III. Les huit octaèdres que nous venons de considérer en dernier lieu sont placés aux extrémités de huit demi-axes de longueur α comme le sont les huit hexaèdres de l'octaédroïde (§ **41**) aux extrémités de huit demi-axes de longueur a. Mais, tandis que ceux-ci se soudent deux à deux par *une face,* ce qui leur permet d'enclore une portion de l'étendue, nous avons vu que chacun des huit octaèdres d'à présent ne tient à un autre que par un point; il s'ensuit qu'ils laissent entre eux des évidements. Ces évidements sont au nombre de quatre, savoir, en les désignant par deux sommets opposés :

$$2.23, \quad 4.17, \quad 6.19, \quad 8.21.$$

Ils sont tous faits comme le premier. Celui-ci a seize faces qui aboutissent à des arêtes du cube

$$1\ 10\ 18\ 9.\ \ 11\ 3\ 13\ 20$$

et sont :

1° Quatre faces, 2 11 3, 2 3 12, 2 12 20, 2 20 11, de l'octaèdre I^2
2° Quatre » 2 1 10, 2 10 18, 2 18 9, 2 9 1, de l'octaèdre I^4;
3° Deux » 1 11 17 et 1 11 19, de » III^1;
4° Deux » 3 10 19 et 3 10 21, de » III^3;
5° Deux » 12 18 21 et 12 18 23 de » III^5;
6° Deux » 9 20 23 et 9 20 27, de » III^7.

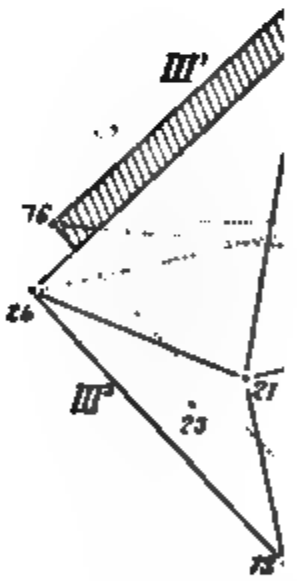


Fig. 47. — Perspective cavalière des huit octaèdres complémentaires.

Si l'on dresse ainsi la liste des 64 faces de (C), si l'on dresse d'autre part celle des 64 faces libres de H, on trouve que ces deux listes sont identiques; on reconnaît en outre que les faces qui dessinent un creux sur celui-ci dessinent un relief sur celui-là, et réciproquement; en un mot, les deux corps *s'emboîtent* exacte-

ment l'un sur l'autre, et les évidements que nous venons de reconnaître sur (C) sont remplis:

2.23 par h_2,
4.17 par h_4,
6.19 par h_6,
8.21 par h_8.

Ce sont les octaèdres occupant les deux colonnes extrêmes du Tableau III, savoir :

$$I^1, II^2, I^3, II^3, III^6, II^5, III^8, II^8,$$

qui forment les *couvercles supérieurs,* et ceux occupant les deux colonnes du milieu, savoir :

$$II^1, III^2, II^4, III^4, II^6, I^5, II^7, I^7$$

qui forment les *couvercles inférieurs.*

Par cet emboîtage, les 64 faces de H qui étaient simples *deviennent doubles,* comme le sont déjà les 32 qui sont ombrées dans les figures 40 à 44; *et le* C^{24} *est constitué, avec ses* 24 *sommets et autant d'octaèdres, ses* 96 *faces doubles et nombre égal d'arêtes triples.*

Nous avons vu que si, dans le Tableau III, on passe d'une case à sa voisine *par leur côté commun,* leurs deux octaèdres tiennent ensemble *par une face.* Si l'on prend deux cases ne se touchant que *par un point,* alors leurs deux octaèdres ne se tiennent aussi que *par un sommet.* Par cette seconde manière, le Tableau III est divisé en deux *groupes diagonaux,* qui y sont distingués par une impression différente; le premier comprend les octaèdres

(A) $I^1, I^3, I^5, I^7, III^2, III^4, III^6, III^8,$

et le second les octaèdres

(B) $II^1, II^2, II^3, II^4, II^5, II^6, II^7, II^8.$

Ces deux groupes sont tels qu'un quelconque des seize octaèdres a un sommet commun avec chacun de ceux faisant partie du même groupe, tandis qu'il y en a quatre dans l'autre groupe avec lesquels il a une face commune et quatre avec lesquels il n'a rien de commun.

Si l'on rapproche de ces deux groupes celui des huit octaèdres appelés plus haut *les complémentaires :*

(C) I^2, I^4, I^6, I^8, III^1, III^3, III^5, III^7,

il est avec chacun d'eux dans les mêmes conditions, c'est-à-dire qu'on peut former avec (C) et (A), ou avec (C) et (B), un Tableau pareil au Tableau III. Voici ces trois Tableaux, qui satisfont à une même condition assez complexe, et dont la confection n'est pas des plus aisées :

TABLEAU V. — AGENCEMENT DES VINGT-QUATRE OCTAÈDRES DU C^{24}.

(AB)

II^8	I^7	III^1	I^1
III^6	II^7	III^2	II^2
II^5	I^5	II^4	I^3
III^4	II^6	III^4	II^3

(BC)

II^1	I^8	II^2	I^2
III^7	II^7	III^3	II^4
II^6	I^6	II^5	I^4
III^1	II^8	III^3	II^3

(CA)

III^2	I^8	I^1	I^2
III^5	III^8	III^3	I^3
I^5	I^6	III^6	I^4
III^7	I^7	III^1	III^4

Rappelons la condition dont il s'agit. Deux des seize octaèdres de chaque Tableau ont une face commune si leurs numéros sont inscrits dans deux cases contiguës *par un côté,* et un sommet commun s'ils le sont dans deux cases contiguës *par un point,* les rangées et les colonnes extrêmes étant censées contiguës par leur bord extérieur comme si le Tableau était, sans solution de continuité, imprimé sur un cylindre horizontal en ce qui concerne les rangées, vertical en ce qui concerne les colonnes. Les octaèdres se trouvent ainsi disposés dans les Tableaux comme ils le sont en réalité sur le C^{24} lui-même : à eux trois, ces Tableaux *à double entrée* (à deux dimensions) remplacent le Tableau *à quadruple entrée* (à quatre dimensions) qui réaliserait la condition à lui seul.

On a donc trois groupes

(A), (B), (C),

dont deux, à volonté, peuvent fournir les octaèdres fondamentaux, tandis que le troisième fournit les huit octaèdres complémentaires. Dans chaque groupe séparé, les 64 faces d'octaèdres sont simples; par l'emboîtage de deux d'entre eux, 32 faces de chacun

se doublent avec 32 faces de l'autre; par l'emboîtage avec le troisième, les $32 + 32$ faces simples restantes se doublent avec les 64 de celui-ci. On retrouve ainsi le nombre des faces du C^{24} égal à $32 \times 3 = 96$, comme il est donné, par une autre considération, égal à $24 \times 8 \times \frac{1}{2} = 96$.

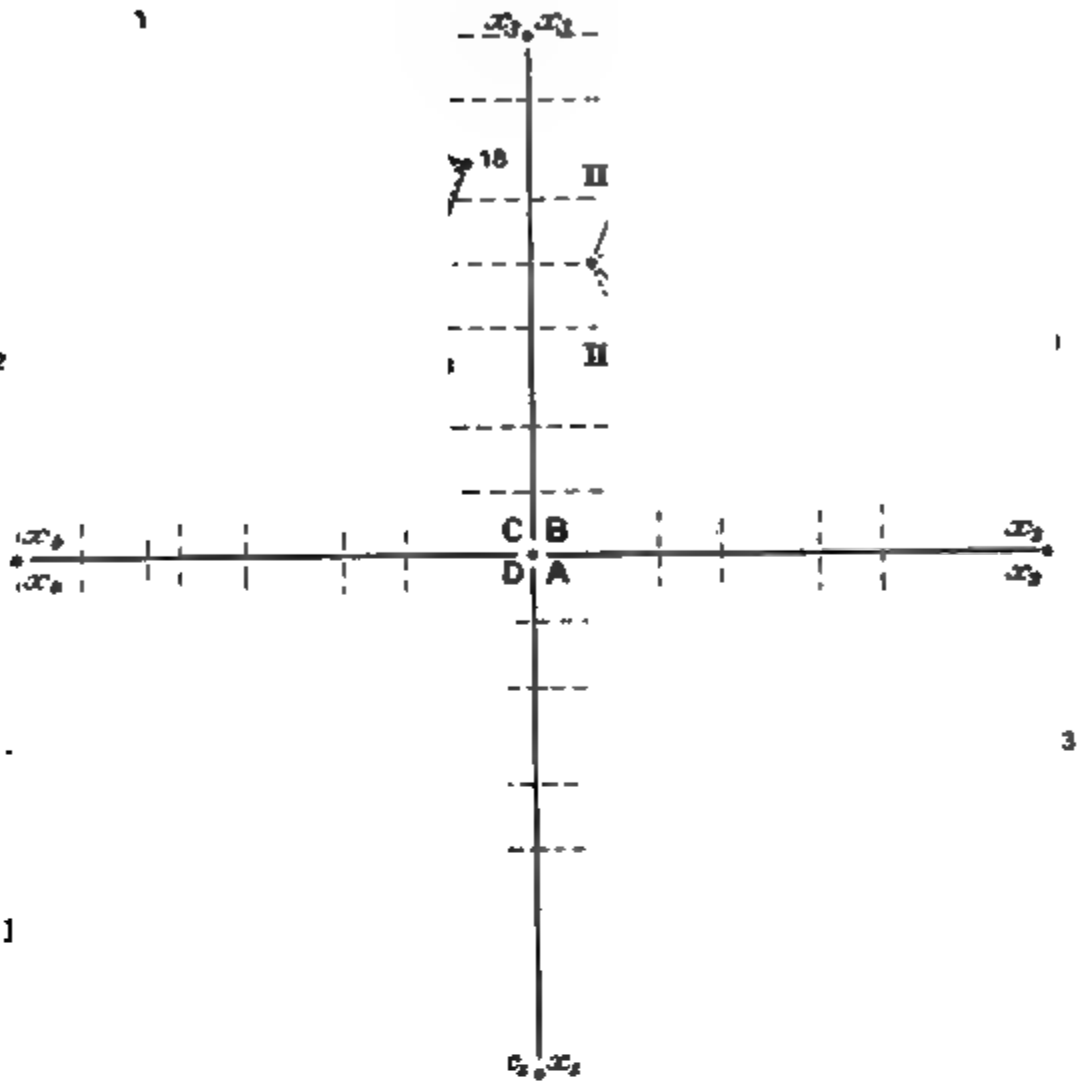
Le groupe B, intermédiaire entre les deux autres, se présente dans les projections avec une symétrie remarquable. Nous le donnons dans la figure 48 qui, débarrassée des constructions dont les précédentes étaient encombrées, semble pouvoir être offerte comme un bon spécimen d'*épure de Géométrie descriptive à quatre dimensions*. — Dans les angles A et C, les octaèdres ont pour projections des carrés superposés par deux; chaque côté d'un de ces carrés est la projection de deux ou de quatre arêtes, et nous avons tracé, suivant le cas, deux ou quatre lignes voisines, qu'il faut considérer comme n'en faisant qu'une. — Dans les angles B et D, nous avons dessiné seulement le pourtour de chaque projection d'octaèdre, formé toujours par la même figure: un hexagone à côtés opposés parallèles, dont deux plus longs; ce pourtour est tracé en pointillé pour les octaèdres à indice pair : II^2, II^4, II^6, II^8. Dans les deux figures, chacun des numéros 1 à 24 devrait être écrit deux fois, parce que chaque sommet appartient à deux octaèdres. Nous avons couvert de hachures les deux octaèdres II^5 et II^8, qui s'attachent par le sommet le plus élevé 24.

La figure 49 est une perspective interprétant la projection B. Cette fois, toutes les arêtes de chaque octaèdre sont dessinées, celles d'un pourtour en traits plus forts. Nous aurions voulu faire ressortir par un modelé que les deux octaèdres

II^5 et II^8, qui s'attachent par le sommet 24,
II^8 et II^3, » » 19,
II^3 et II^5, » » 13,
II^5 et II^2, » » 21,

y ont *le vide* au-dessous d'eux et y forment une espèce de *pont*.

Projetés sur un *plan* quelconque, par exemple sur le plan B de la figure 48, où ils forment autour du centre une si régulière couronne d'hexagones, les huit octaèdres II y ont des parties communes : des *recouvrements*. Projetés sur un *espace* quelconque, ils y ont aussi, au moins quelques-uns, des parties communes :



Figures 48 et 49. — Projections et perspective de l'hyperpolyèdre (B).

des *pénétrations*. Prenons, par exemple, l'espace des deux plans B et A de la même figure 48; les projections sur cet espace sont des octaèdres s'écartant plus ou moins de la forme strictement régulière représentée figure 28, page 129 et figure 39, page 148; on peut les construire séparément comme il suit.

Avec l'aiguille emmanchée, piquez sur une autre feuille les

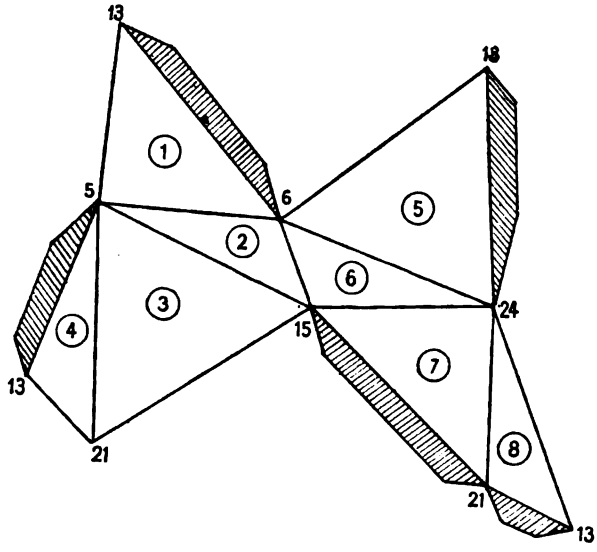


Fig. 50. — Développement de $\overline{\text{II}^5}$.

points qui, dans chacun des angles A et B de la figure 47, portent les numéros

5, 6, 15, 24, 21, 13;

joignez tous ces points deux à deux par des droites, excepté 5 et 24, 6 et 21, 15 et 23; vous aurez, en géométrie descriptive ordinaire, la représentation de l'octaèdre qui est la projection de II^5, et que nous représenterons par $\overline{\text{II}^5}$.

Construisez chacune de ses faces en vraie grandeur : ce ne sera pas long, parce que plusieurs arêtes sont perpendiculaires ou parallèles à l'un ou à l'autre des plans de projection. Accolez ces huit triangles de proche en proche par leurs côtés de mêmes numéros en les groupant par quatre autour des sommets 5 et 24; vous aurez la figure 50. Faites-en deux pyramides quadrangulaires, l'une avec le sommet 5 et les faces marquées 1, 2, 3, 4,

l'autre avec le sommet 24 et les faces marquées 5, 6, 7, 8; puis, appliquez-les l'une contre l'autre par leur base en les faisant tourner autour de la ligne commune 6-15; vous aurez l'octaèdre $\overline{11^5}$ lui-même, de forme très aplatie.

Faites de même avec les points

3, 4, 13, 23, 10, 11;

vous aurez la figure 51 et l'octaèdre $\overline{11^3}$.

Continuant avec les six octaèdres $\overline{11}$, vous en trouverez trois

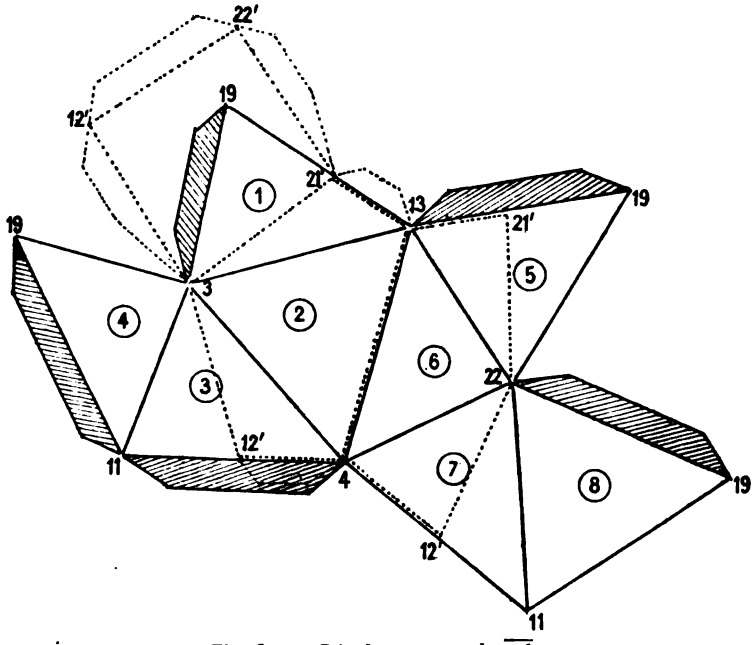


Fig. 51. — Développement de $\overline{11^3}$.

pareils (sauf bien entendu, le numérotage des sommets) à $\overline{11^5}$, un pareil à $\overline{11^3}$, deux symétriques de $\overline{11^3}$.

Cherchez maintenant à réunir ces huit octaèdres par leur sommet comme l'indique le Tableau V pour leurs homonymes de l'étendue. Vous ne pourrez construire que deux moitiés séparées

$\overline{11^1}$, $\overline{11^2}$, $\overline{11^7}$, $\overline{11^8}$ et $\overline{11^4}$, $\overline{11^3}$, $\overline{11^5}$, $\overline{11^6}$ [1];

(1) Voici la manière peut-être la plus simple de faire cette construction. Dessiner sur une planchette le carré 20 7 24 3 de l'angle A (*fig.* 48); planter

pour les amener à la position voulue, il faut, en ne nous occupant que de la partie droite, enlever préalablement, dans un des octaèdres $\overline{11}^2$ ou $\overline{11}^5$, la partie qui leur est commune et qui est déterminée, dans le premier par le plan 3 12 21, dans le second par le plan 3 11 19. Si c'est celui-ci qui est choisi pour l'opération, il devient un autre solide, dont le développement est donné par les traits pointillés de la figure 51.

En tenant compte de ces troncatures, construisez encore les seize autres octaèdres $\overline{1}$ et $\overline{111}$; puis accolez-les de proche en proche par leurs faces de mêmes numéros, comme l'indique le Tableau V. Vous aurez un polyèdre que vous pourrez appeler *la projection de l'icosatétraédroïde sur notre espace,* et qui, dans la mesure du possible, en reproduira la constitution octaédrale.

Le C^{24} a douze *quatrièmes diagonales,* avec lesquelles on peut faire trois systèmes de coordonnées rectangulaires : si, en effet, l'on en prend une quelconque, les trois qui forment avec elles un pareil système sont déterminées en lui menant par le centre un espace perpendiculaire. *Les trois groupes* A, B, C *correspondent à ces trois systèmes.* Nous laisserons au lecteur le soin de chercher quelle correspondance ils ont d'autre part avec les trois groupes de sommets qui ont été reconnus dans le paragraphe précédent. Nous lui laissons aussi le soin de construire les sections du C^{24} par des espaces perpendiculaires aux diagonales des divers systèmes; entre autres figures, il retrouvera le rhombododécaèdre.

NOTA. — Le numérotage que nous avons adopté pour les sommets du C^{24} en commençant l'étude de cet hypercorps est celui qui se présente le plus naturellement quand on regarde la

---

sur le milieu de chaque côté *deux* aiguilles se touchant, fines et longues; y enfiler les octaèdres de manière que les arêtes

2 11 et 12 4, 2 12 et 11 4 de $\overline{11}^1$ et $\overline{11}^4$, $\overline{11}^2$ et $\overline{11}^3$,
10 21 et 19 13, 10 19 et 21 13 de $\overline{11}^3$ et $\overline{11}^8$, $\overline{11}^8$ et $\overline{11}^5$,
8 16 et 15 6, 8 15 et 16 6 de $\overline{11}^8$ et $\overline{11}^5$, $\overline{11}^1$ et $\overline{11}^6$,
9 17 et 23 14, 9 23 et 17 14 de $\overline{11}^7$ et $\overline{11}^6$, $\overline{11}^1$ et $\overline{11}^4$

soient respectivement le long des deux aiguilles plantées entre 20 et 3, 3 et 24, 24 et 7, 7 et 20.

projection *supérieure droite* dans les épures qui le représentent. Mais il n'a qu'une régularité partielle. Au lecteur qui voudrait reprendre ou poursuivre notre étude, nous conseillons de remplacer les numéros

20,1,24,5; 22,3,18,7; 14,9,10,13; 16,11,12,15; 4,17,8,21; 6,19,2,23

respectivement par

1,2,3,4; 5,6,7,8; 9,10,11,12; 13,14,15,16; 17,18,19,20; 21,22,23,24.

Cette deuxième notation est modelée sur la division hexaédrale du C^{24}, et nous paraît la plus maniable et la plus suggestive de toutes; elle donne les vingt-quatre octaèdres comme le montre le Tableau suivant, qui remplacerait le tableau II, de la page 142.

	A	B	C
1.....	1 9 17. 5 14 18	1 9 17. 4 15 24	1 9 18. 8 10 24
2.....	2 10 18. 8 13 19	2 10 18. 1 14 23	2 10 19. 7 11 23
3.....	3 11 19. 7 16 20	3 11 19. 2 13 22	3 11 20. 6 12 22
4.....	4 12 20. 6 15 17	4 12 20. 3 16 21	4 12 17. 5 9 21
5.....	5 13 21. 3 12 22	5 13 21. 8 9 18	5 13 22. 2 14 18
6.....	6 14 22. 2 11 23	6 14 22. 5 12 17	6 14 23. 1 15 17
7.....	7 15 23. 1 10 24	7 15 23. 6 11 20	7 15 24. 4 16 20
8.....	8 16 24. 4 9 21	8 16 24. 7 10 19	8 16 21. 3 13 19

§ 46. — L'hexacosiédroïde, ou le C^{600}, et l'hécatonicosaédroïde, ou le C^{120}.

Nous avons exposé (§ 42), les principes de l'établissement du cinquième polyédroïde régulier, nous ne les développerons pas et nous nous bornerons à donner de ce corps une idée sommaire.

Nous serons encore plus bref pour le sixième, et nous renverrons, pour ce qui les concerne l'un et l'autre, aux monographies, déjà citées, de M. Schoute, de M. Van Oss et de M^me^ Stott.

I. Nous empruntons au second de ces auteurs la figure 52 qui représente les projections du C^{600} sur les quatre plans d'un système de coordonnées rectangulaires qui sera défini plus bas. Les deux

projections supérieures, x_1x_2 et x_3x_4, font voir cinq systèmes de

Fig. 52. — L'hexacosiédroïde.

lignes parallèles qui les divisent chacune en six zones et sont les

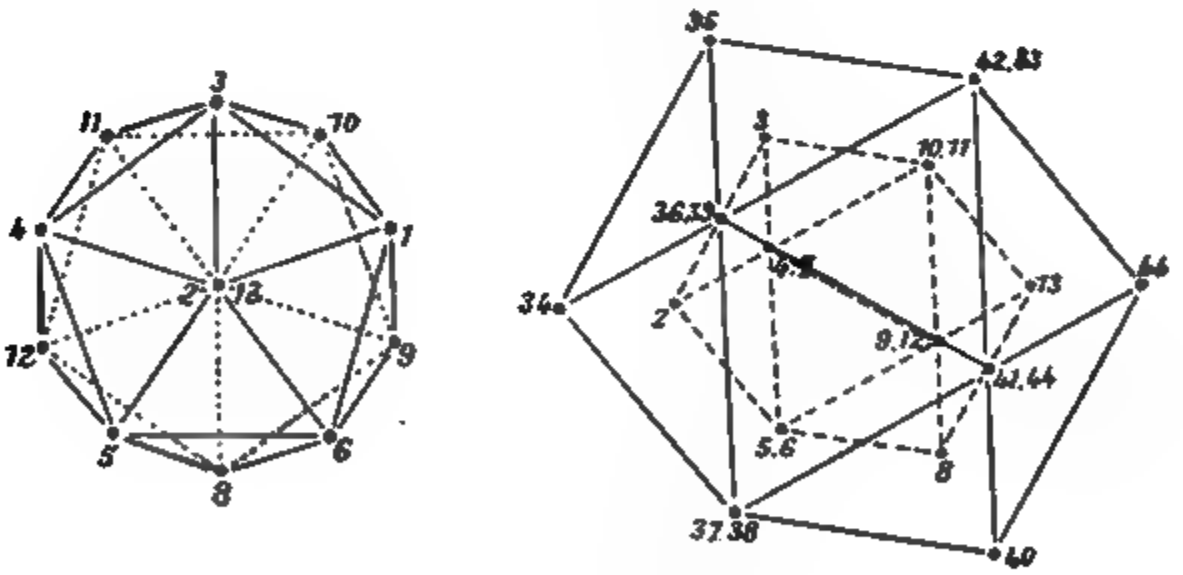


Fig. 53 et 54. — Icosaèdres réguliers.

projections d'autant d'*espaces* perpendiculaires à la diagonale 1 — 1, une des soixante *premières diagonales* de cet hypercorps. Les divisions se présentent comme il suit en descendant du sommet 1 jusqu'au milieu : il est inutile d'aller plus loin à raison de la symétrie.

1° Tout en haut est une calotte formée par douze arêtes partant du sommet 1 et aboutissant à douze autres sommets numérotés de 2 à 13. Nous savons déjà, par le § 39, que ces douze sommets sont ceux d'*un icosaèdre régulier*. Ce solide a une droite

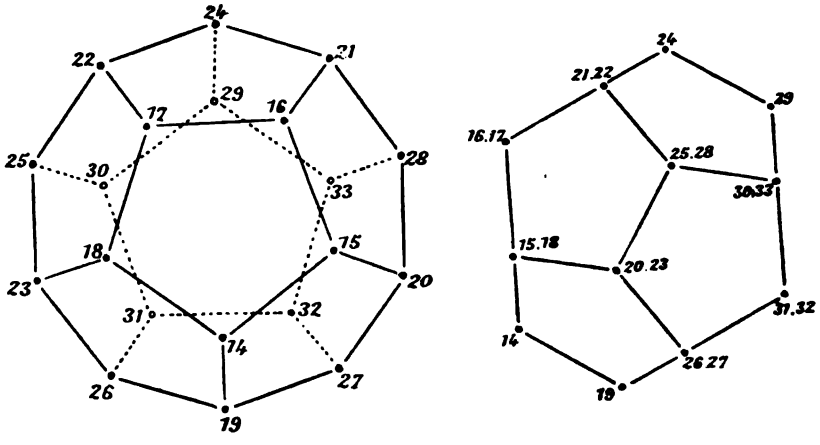


Fig. 55 et 56. — Dodécaèdres réguliers.

pour projection sur x_1x_2 et sur x_3x_4 parce que son espace est perpendiculaire à ces plans. Si nous considérons spécialement le premier, nous voyons que deux sommets, 2 et 13, se projettent chacun isolément, tandis que les autres se projettent suivant deux groupes de cinq points : ce sont deux pentagones réguliers situés dans un plan absolument perpendiculaire au plan de projection. On voit ces pentagones en vraie grandeur sur le plan x_3x_4 (compartiment C), auquel ils sont parallèles; l'icosaèdre lui-même a pour projection sur ce plan une figure que nous avons reportée à part (*fig.* 53), et dans laquelle on reconnaît aisément que la projection du solide est faite sur un plan perpendiculaire à une première diagonale. Sur le plan x_1x_2 (compartiment A), notre icosaèdre a pour projection une figure qui a été reportée à part (*fig.* 54, traits pointillés) et qui est la projection du solide sur

un plan parallèle à deux arêtes. Enfin, on peut le voir encore, avec deux autres, afférents l'un au sommet — 36, l'autre au sommet — 53, sur la figure 57 où les points multiples de la projection x_2x_3 ont été dédoublés en faisant tourner l'hypercorps comme nous l'avons fait tant de fois dans les paragraphes précédents.

2° L'espace qui vient ensuite contient vingt sommets, numérotés de 14 à 33, formant ensemble un dodécaèdre : en projection sur le plan x_3x_4, ils forment la figure 54, où l'on reconnaît la projection de ce solide sur un plan perpendiculaire à une troisième diagonale (ou parallèle à une face); sur le plan x_1x_2, ils forment la figure 55, qui est la projection de ce solide sur un plan parallèle au plan diamétral mené par une seconde et une troisième diagonales perpendiculaires entre elles (1).

3° L'espace qui vient ensuite contient vingt autres points

$$34; 35, 36, 37, 38, 39; 40, 41, 42, 43, 44; 45$$

formant un deuxième, ou *grand* icosaèdre; on le voit sur la figure 53, où sa projection, en traits pleins, ne diffère de celle du premier que par la grandeur.

4° Enfin l'espace équatorial contient trente sommets numérotés de 46 à 60 et de — 60 à — 46, qui peuvent être considérés comme la combinaison d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre.

Tels sont les

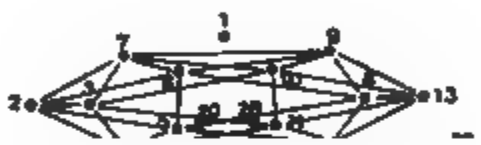
$$(1 + 2 + 10 + 12) \times 2 + 30 = 120$$

sommets. Ils forment *six cents tétraèdres* qu'on déduit des neuf figures précédentes (savoir : les points 1 et — 1, les deux petits icosaèdres, les deux dodécaèdres, les deux grands icosaèdres et le polyèdre équatorial) en associant, suivant un détail dans lequel nous n'entrerons pas, soit quatre sommets d'une même figure ou de deux figures voisines, soit un sommet avec une face, soit une arête avec une arête. On obtient ainsi les nombres de 720 *arêtes* et 1200 *faces* inscrits au Tableau de la page 104.

Ensemble, les deux figures supérieures, x_2x_3 et x_3x_4, repré-

(1) Il est généralement peu aisé de comprendre les projections où abondent les points multiples; le lecteur pourra se rendre compte des figures 53 et 55, en les comparant aux figures 18 où les numéros sont les mêmes.

sentent *la projection de l'hypercorps sur un espace* $x_2 x_3 x_4$ *perpendiculaire à une deuxième diagonale :* celle qui joint le milieu de l'arête 58 59 au milieu de son opposé — 58 — 59. Cette projection est un polyèdre à 52 sommets, 130 arêtes et 80 faces, formé de deux calottes polaires comprenant entre elles quatre pyramides régulières tronquées. L'axe 1 — 1 est, pour employer le langage de la Cristallographie, à période 10, c'est-à-dire qu'une rotation de 36° ramène le corps sur lui-même. Les deux figures



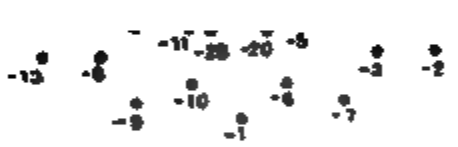


Fig. 57. — Séparation des 120 sommets du C^{600}.

de gauche, $x_2 x_4$ et $x_4 x_1$, représentent la projection de l'hypercorps sur un espace $x_2 x_4 x_1$ perpendiculaire à *une autre deuxième diagonale :* celle qui joint le milieu de l'arête 34 — 45 à celui de l'arête — 34 45.

Ensemble, les deux figures inférieures représentent la *projection de l'hypercorps sur un espace perpendiculaire à une première diagonale* 1 — 1, et les deux figures de droite celle sur un espace perpendiculaire à *une autre première diagonale* 56 — 56. Chacun de ces polyèdres a 42 sommets.

Le système de coordonnées auquel est rapportée la figure 52 est celui constitué par ces quatre espaces perpendiculaires entre eux.

Si l'on fait tourner de 90° la projection $x_4 x_3$ de la figure 52, de

manière que les sommets 46, — 51, — 46, 51 prennent respecti-

Fig. 57*bis*, *complétant la fig.* 57.

vement la place de — 51, — 46, 51, 46 et si ensuite, en l'asso-

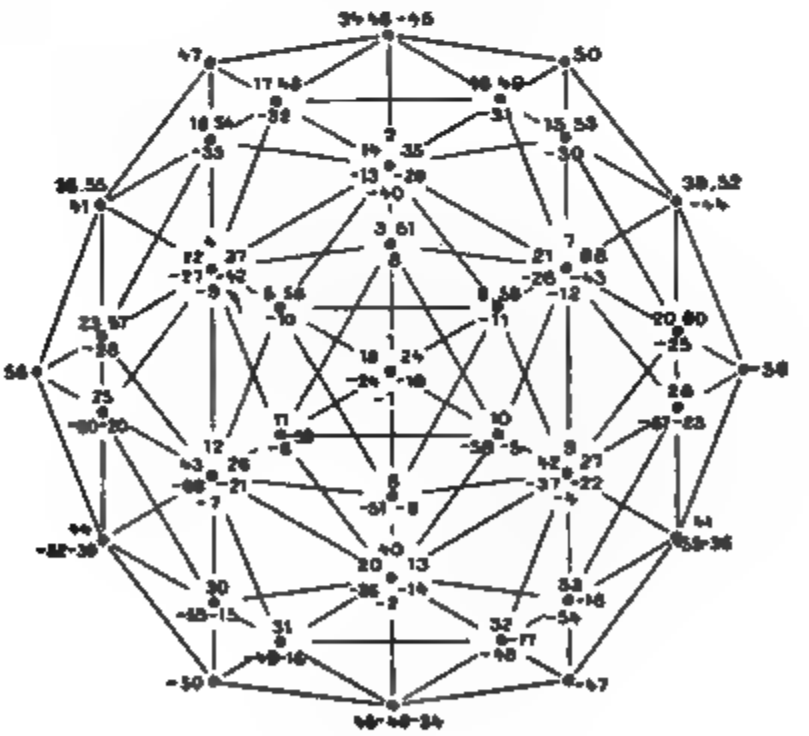


Fig. 58. — Projection du C^{600} sur un plan parallèle à une face.

ciant avec $x_3 x_4$, on construit une nouvelle projection $x_1 x_2$, on aura une figure que nous reportons (*fig.* 57) et qui sera la *projection de l'hypercorps sur un plan parallèle à une face :* la face 8 5 6, ou sa parallèle 3 10 11, ou les deux opposées. En en détachant encore le *petit icosaèdre* et le *dodécaèdre* qui sont perpendiculaires à la diagonale 1 — 1, on a, cette fois, les figures 59 et 60; la première est la projection de l'icosaèdre régulier sur un plan parallèle à une face, et la seconde, la

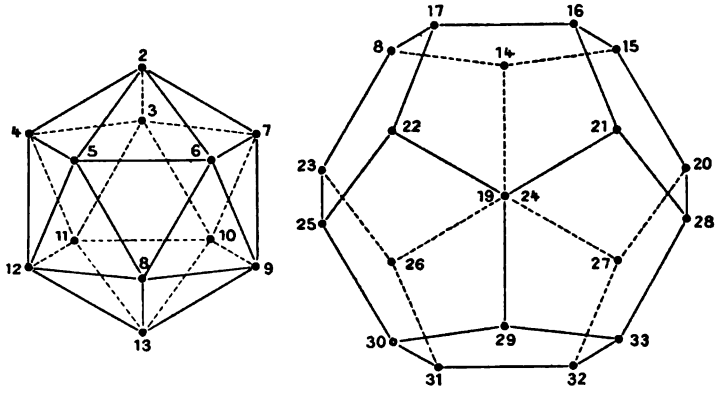


Fig. 59 et 60. — Un icosaèdre et un dodécaèdre.

projection du dodécaèdre régulier sur un plan perpendiculaire à une première diagonale.

II. Le dernier polyédroïde est constitué par 120 dodécaèdres réguliers, qui se réunissent par trois sur 1200 arêtes, tandis que celles-ci se réunissent par quatre sur 600 sommets. On verra, dans le Paragraphe suivant, qu'il peut se déduire directement du précédent.

Nous renonçons à le décrire, parce qu'il ne paraît guère se prêter, comme les précédents, à des décompositions faciles à voir séparément. Nous nous contenterons d'en donner une projection sur notre espace et une coupe centrale par le même, faites en supposant l'hypercorps placé de manière qu'une de ses troisièmes diagonales lui soit perpendiculaire. Les deux figures, empruntées à M. Schoute, sont des perspectives cavalières.

La *projection* (*fig.* 61) est un polyèdre qui a 160 sommets

disposés par

10, 10, 10, 20, 20, 10; 10, 20, 20, 10, 10, 10

dans douze plans parallèles, et 92 faces, dont 10 sont des octogones formant une zone équatoriale, 80 des pentagones formant

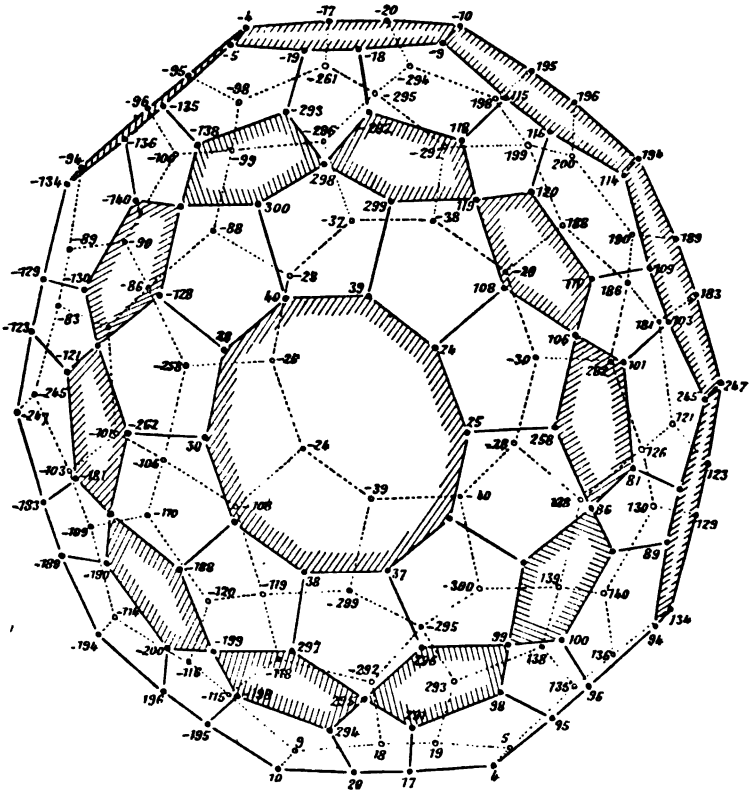


Fig. 61. — Projection orthogonale de l'hécatonicosaédroïde sur un espace perpendiculaire à une troisième diagonale.

deux rangées de chaque côté de celle-ci, deux des décagones polaires; la ligne joignant les centres de ces derniers est l'axe auquel les douze plans sont perpendiculaires.

La *coupe* (*fig.* 62) est un polyèdre ayant 80 sommets disposés par dix dans huit plans perpendiculaires; il est figuré de la même manière, et l'on a reporté sur le dessin, en guise de repère, la

moitié du polyèdre précédent qui se trouve au-dessus du plan commun de symétrie; elle est dessinée en traits allongés et en points blancs, ceux-ci accompagnés de numéros qui sont ceux des sommets correspondants de l'hypercorps. Quelques traits ont

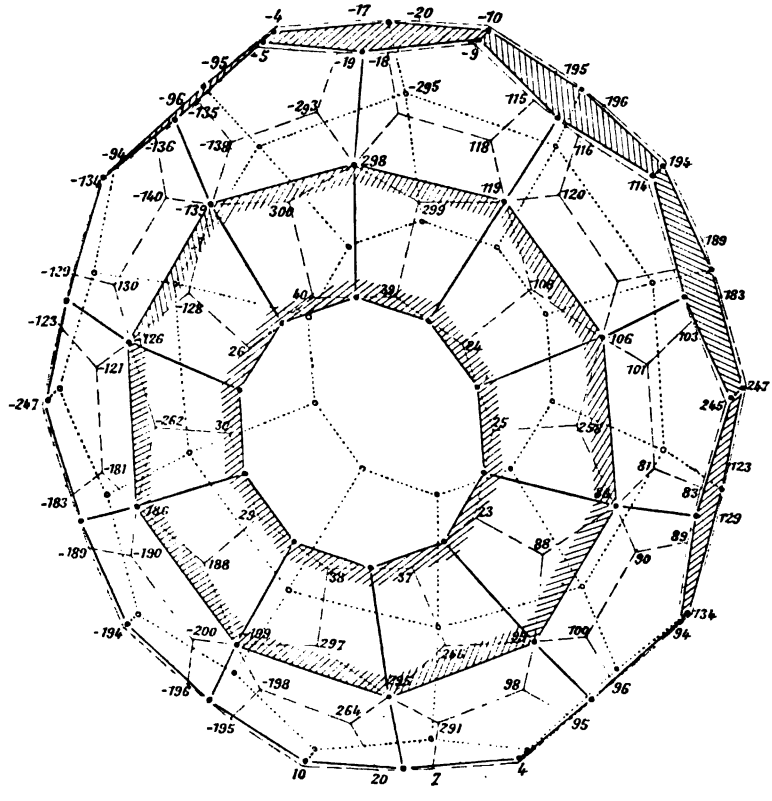


Fig. 62. — Section de l'hécatonicosaédroïde par un espace central perpendiculaire à une troisième diagonale.

été accentués par des amorces de hachures pour faire ressortir la symétrie.

§ 47. — Dualité.

Si l'on prend (§ 32) la figure polaire de chacun des six corps réguliers par rapport à une hypersphère concentrique H, on trouve les résultats suivants. Le C^5 en produit un autre qui lui

est concentrique; il en est de même du C^{24}; le C^8 donne un C^{16} et le C^{600} donne un C^{120}, et réciproquement. Les cases, faces, arêtes et sommets ont fourni respectivement les sommets, arêtes, faces et cases de la figure transformée.

Ces résultats sont d'accord avec le Tableau II (§ 38), où les nombres contenus dans les deuxième, troisième, quatrième et cinquième colonnes se reproduisent pour le C^5 et le C^{24} quand on les lit de la droite à la gauche, tandis que ceux du C^8 et du C^{600}, lus de même, reproduisent ceux du C^{16} et du C^{120}.

Ils sont un intéressant exemple de la loi de dualité (§ 19). Ils montrent que l'existence du C^8 et du C^{600} entraîne celle du C^{16} et du C^{120}, et que les deux premiers corps déterminent tous les détails de forme comme tous les éléments métriques des deux autres; aussi pourrait-on se contenter d'établir et d'étudier directement quatre polyédroïdes réguliers au lieu de six.

Afin de préciser cette proposition, soient E un espace quelconque et p son pôle relativement à l'hypersphère H. La théorie esquissée (§ 32) nous fournit ces trois points : 1° les intersections de E avec les arêtes, faces et espaces (cases) d'une des figures réciproques sont les polaires des espaces, plans et droites obtenus en joignant p aux faces, arêtes et sommets de l'autre; 2° si l'on appelle S la sphère intersection de E et de H, les intersections de E avec les arêtes, faces et espaces d'une des deux figures sont les polaires par rapport à S des projections des faces, arêtes et sommets de l'autre, faites sur cet espace avec p comme point radiant; 3° par conséquent, la section d'une des figures par un espace ou un plan donné, comme aussi sa projection sur cet espace ou ce plan, peuvent se déduire de celles de l'autre figure, soit par le calcul, soit par des constructions géométriques, à volonté.

Une projection du C^{600} sur un espace de symétrie a pour réciproque une section du C^{120} par un espace de symétrie, et inversement (1). La correspondance a lieu comme il suit : si l'un des deux espaces est perpendiculaire à une première, deuxième, troisième et quatrième diagonale, la figure réciproque l'est à une quatrième,

(1) C'est un cas particulier d'un théorème très général de *Géométrie projective*. (Voy. Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse...*, dans *Math. Ann.*, t. XIX, 1882.)

troisième, deuxième et première diagonale. Ainsi le polyèdre que représente la figure 62 est polaire réciproque de celui que représentent ensemble les deux projections $x_3\,x_4\,x_1$ de la figure 52 : la ligne joignant les centres des deux décagones du premier correspondant à la diagonale 1 — 1 du second; de ce que celui-ci a 120 faces dont 20 quadrilatères et 100 triangles, il suit que celui-là a 120 sommets dont 20 à chacun desquels il aboutit quatre faces et 100 à chacun desquels il en aboutit trois, etc.

Le rayon r de l'hypersphère transformante étant arbitraire, on peut en disposer pour que les deux corps réciproques aient la même longueur d'arête et, par suite, soient inscrits dans la même hypersphère. Pour le C^{24}, par exemple, il faut prendre

$$r = \frac{a}{\sqrt[4]{2}};$$

alors il *se transforme en lui-même,* mais en changeant de position dans l'hypersphère qui le contient, de sorte qu'un de ses sommets n'a pas pour correspondant dualistique un de ses octaèdres.

Les centres des cases d'un polyédroïde régulier sont les sommets d'un polyédroïde réciproque; ainsi les centres des 600 tétraèdres du C^{600} sont les 600 sommets d'un C^{120}.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS.

§ 48. — L'axiome des trois dimensions.

Il y aurait lieu de considérer deux catégories d'applications de la Géométrie à quatre dimensions : celles qui concernent les sciences mathématiques et celles qui concernent les sciences physiques. Les premières ne sont généralement pas d'ordre élémentaire, et elles rempliraient un volume autrement lourd que celui-ci; nous n'ajouterons rien à ce que nous avons pu en dire à diverses reprises. Nous passons aux secondes; mais nous ne nous dissimulons pas que le terrain est moins solide et plus difficile : ce n'est plus de la Géométrie. Il nous a semblé toutefois que nous ne pouvions guère nous dispenser de cette courte excursion.

L'univers que l'homme habite, et dans lequel toutes ses sensations prennent naissance, existe dans ce qu'il appelle *l'espace*. C'est ce que nous disions dès le début et, comme nous le faisions prévoir, les notions que nous avons acquises depuis font de cet être quelque chose de moins absolu : remplaçant l'article défini *le* par l'article indéfini *un,* nous disons maintenant que c'est *un espace, un champ du troisième degré;* nous admettons qu'il est plongé dans un champ de degré supérieur, une étendue à quatre dimensions. Il y coexiste avec une infinité d'espaces semblables, parallèle aux uns, ayant avec chacun des autres un plan commun, de même que le plan sur lequel nous marchons coexiste avec une infinité de plans semblables, parallèle aux uns, ayant avec chacun des autres une droite commune.

Le physicien, allié ou non avec le mathématicien, s'occupe des mouvements dont cet espace est le théâtre, et ces mouvements

sont de deux sortes. Les uns sont ceux *des masses,* choses *que nous considérons* comme des agglomérations d'atomes en nombre immense et d'une petitesse que nous ne pouvons pas concevoir, bien que nous soyons parvenus à l'exprimer par des chiffres. Les autres sont *ceux des atomes* eux-mêmes au sein de la masse. Les premiers tombent sous nos sens, dont nous avons su augmenter la puissance au moyen d'instruments variés; les seconds, de nature essentiellement vibratoire, s'accomplissent dans des espaces dont la petitesse est du même ordre que celle des atomes; ils sont, comme ceux-ci, à une énorme distance (énorme comparativement à leur grandeur) de l'extrême limite du terrain sur lequel portent nos observations.

Il y a une étroite dépendance entre les premiers mouvements et l'axiome des trois dimensions (Avant-propos, pages VI et XVI), puisque celui-ci ne serait autre chose que l'expression d'un sentiment héréditaire leur devant son origine. On doit donc admettre qu'ils lui sont subordonnés, c'est-à-dire qu'aucun échange de matière ni d'énergie ne s'accomplit de leur fait entre notre espace et les autres. Les théories physiques ne présentent d'ailleurs pas de cas dans lesquels la nécessité d'invoquer de pareils échanges se ferait sentir; bien entendu, nous laissons de côté, trop étrangers à ces sujets pour nous permettre d'en parler, le parti que les spirites et les thaumaturges entendent tirer de la quatrième dimension.

Mais, puisque l'axiome des trois dimensions n'est qu'un fait d'ordre expérimental et n'a par ailleurs aucune espèce de nécessité, que d'autre part les mouvements moléculaires, s'ils existent réellement, ne sont pas de cet ordre; ils n'ont rien à faire avec lui. Or, ces mouvements présentent des circonstances qui ne sont pas exprimables par des fonctions ne contenant, avec le temps, que les trois coordonnées de l'espace. On en jugera par la considération suivante. Les corps célestes, en particulier la matière *si divisée* des comètes, marchent dans l'éther avec d'énormes vitesses sans en éprouver de résistance, en d'autres termes, sans lui communiquer la moindre parcelle de leur force vive; au contraire, la molécule animée du mouvement vibratoire que nous appelons *chaleur,* si mouvement il y a, partage rapidement avec lui son excédent d'énergie. Il faut alors qu'il y ait une différence

fondamentale entre le mouvement moléculaire ou atomique et celui des particules de matière, même les plus ténues que nous puissions concevoir.

Les fonctions ne contenant que trois coordonnées se trouvent encore insuffisantes lorsqu'il s'agit des phénomènes de la vie, probablement aussi des phénomènes chimiques qui en sont voisins et, en termes généraux, toutes les fois que deux substances ayant même composition atomique manifestent des attributs ou des propriétés dissemblables. L'impuissance de la Mécanique classique vis-à-vis de ces différents cas vient évidemment de ce que des termes essentiels, mais qu'elle ne sait pas où prendre, manquent dans ses équations. C'est avec eux qu'entrerait en scène la quatrième composante, négligeable jusque-là devant les trois qui ont si bien tenu leur rôle tant qu'elles n'ont eu affaire qu'aux mouvements qui tombent sous nos sens, c'est-à-dire, ajouterait un philosophe, qui sont des *choses de perception,* tandis que les mouvements atomiques ne sont, tout comme la quatrième dimension, que des *choses de conception*.

Il est donc naturel, autant que légitime, d'admettre la quatrième composante dans ces petits espaces qui échappent à notre conception, de l'appliquer à ces petits mouvements qui diffèrent tant de ceux que nous voyons; en un mot, d'y remplacer le système trirectangulaire par le système quadrirectangulaire. Sur cette base, la mécanique moléculaire peut édifier des calculs facilement et à perte de vue. Nous ne l'y suivrons pas. Nous ne voulons plus qu'indiquer rapidement, d'après René de Saussure, de Genève (1), comment on peut concevoir le mécanisme des actions chimiques, dans cet ordre d'idées; mais il nous faut auparavant présenter, ou plutôt renouveler deux observations.

§ 49. — Récapitulation des qualités de l'espace.

La première est que notre espace n'est qu'une *tranche* élémentaire de cette étendue qui l'entoure de toutes parts. Dans le sens

(1) *Les phénomènes physiques et chimiques et l'hypothèse de la quatrième dimension.* (*Arch. des Sc. phys. et nat. de Genève,* janvier et février 1891, et *Revue scientifique* du 9 mai 1891.)

de la quatrième dimension, il est infiniment mince et absolument plat, et il en est de même de tous les êtres qu'il contient. En un quelconque de ses points on peut lui élever une perpendiculaire, et on peut lui en abaisser une d'un point quelconque de l'étendue extérieure (§ 14). Cette perpendiculaire, qui est unique, n'a pas d'autre point commun avec l'espace ; elle est perpendiculaire à toutes les droites et à tous les plans qu'on peut mener dans celui-ci par son pied ; elle s'appelle l'*axe de la quatrième dimension*. Toute droite faisant avec elle un angle différent de 90° n'a également qu'un point commun avec l'espace et est du domaine de la quatrième dimension. Mais toute droite faisant avec elle un angle de 90°, et toute droite ayant deux points dans l'espace, sont entièrement dans celui-ci.

Une quelconque des choses qui sont dans l'espace en sort et n'existe plus pour nous si on la déplace si peu que ce soit suivant l'axe de la quatrième dimension ou une de ses obliques. Un point matériel marchant dans l'étendue suivant une de ces directions le traverse instantanément. Si le mobile a des dimensions finies, la durée de la traversée a aussi une valeur finie correspondant à ces dimensions. Si c'est, par exemple, l'hypersphère du § 31, l'apparence sera la même que celle que nous avons décrite alors en supposant que c'est l'espace $x_4 = 0$ qui se transporte parallèlement à lui-même à travers l'hypersphère immobile ; on verra une sphère d'abord très petite, puis grossissant jusqu'à avoir le diamètre 2 R, puis diminuant jusqu'à zéro ; rien avant ni après ; l'apparition sera immobile, puisque le point d'entrée dans l'espace et celui de sortie ne sont qu'un seul et même point ; par conséquent, on lui verra le mouvement contraire à celui, sans doute fort rapide, qui nous emporte à notre insu dans l'espace ; on ne pourra pas trouver de cause au phénomène.

Pour le professeur Karl Pearson, de Londres, chaque atome serait un filet d'éther [*an ether squirt* (1)] traversant ainsi perpétuellement notre espace, avec une densité soumise à cer-

(1) *Ether squirts* (*Amer. Journ. of math.*, vol. XIII, 1891, p. 308; *Cambridge phil. trans.*, vol. XXIV, p. 71 ; *London math., Soc. Proceedings*, vol. XX, 1889, p. 38 et 297).

Le mot anglais *squirt*, substantif ou verbe, veut dire : *seringue*, ou *seringuer*.

taines variations périodiques. Cette idée bizarre, mais se prêtant remarquablement bien au calcul, comme le montrent sans conteste les volumineux Mémoires de l'auteur, rend compte facilement des actions interatomiques, optiques, électriques, magnétiques, de l'attraction newtonienne, etc. Elle mène tout droit à cette autre idée, émise par Hinton, que la naissance, le développement, la vie et la mort des êtres animés ne seraient que *des phases* présentées par le passage de corps à quatre dimensions à travers notre espace.

Avec les qualités qu'on vient d'énumérer l'espace n'est qu'un être de raison, et les êtres à trois dimensions qu'il contient ne sont aussi que des abstractions. Puisqu'il n'est qu'une tranche de l'étendue, ils ne sont, eux, que les sections faites par cette tranche dans des corps à quatre dimensions. Ceux d'entre eux qui se disent des êtres pensants n'existent, tout comme les autres, que dans l'esprit de l'être de l'hyperespace qui les conçoit, et leurs pensées ne sont que des formes de celles de cet être. C'est tout simplement le système philosophique de Spinosa (1), dont Voltaire a dit : « Je ne connais que Spinosa qui ait bien raisonné. » L'exacte définition des champs supérieurs apporte à ce système le théâtre concret et la précision matérielle qui lui manquaient.

Mais si l'on veut qu'au lieu d'être de pures abstractions, l'espace et ce qu'il contient soient des choses réelles, il faut considérer le premier comme étant la *figure limitante,* la *couche superficielle* (c'est une *hypersurface,* voyez § 28) d'un corps à quatre dimensions (un *hypercorps*), que nous appellerons le *Support.* Il serait à ce corps ce que, en descendant d'un degré, la surface terrestre, chose à deux dimensions, est sur la Terre, chose à trois. Naturellement, on admettra, soit d'emblée, soit à titre approximatif, que l'hypersurface est du premier degré, c'est-à-dire est un espace ordinaire.

Le Support, doué d'élasticité et de rigidité, serait l'agent trans-

(1) *Ethica more geometrico demonstrata et in quinque partes distincta,* Amsterdam, 1677. — L'Œuvre de Spinosa a été traduite en français par Em. Saisset, 3 vol. in-12, Paris, Charpentier, 1872. Le Tome I est une *Introduction* remarquable de clarté et de fidélité; l'*Ethique* forme le Tome III.

metteur des vibrations, et remplirait le rôle pour lequel notre Physique a créé le chimérique éther : toute molécule animée d'un mouvement vibratoire lui en communiquerait une partie, qui se propagerait immédiatement dans sa masse, et passerait partiellement dans toute autre molécule en contact avec lui (1). Les molécules appartenant à certaines catégories déterminées se mettraient à l'unisson, en quelque endroit qu'elles se trouvent ; les différences spécifiques des corps simples et le fait, qui étonne tant le chimiste, de leur petit nombre en présence du nombre infini de vibrations possibles, seraient ainsi expliqués avec autant de naturel que de simplicité.

Quant aux êtres que contiendrait cet espace, la manière la plus simple de les concevoir est de leur attribuer une épaisseur extrêmement faible dans le sens de la quatrième dimension. Ce sont ainsi des êtres réels (*Voy.* Avant-propos, p. xx), et, comme quelques-uns sont en outre des êtres pensants, nous allons, dans les paragraphes qui suivent, chercher à nous rendre compte des impressions que doit produire sur leur entendement l'état de choses dans lequel nous les mettons.

Comme leur quatrième dimension est très petite, ils n'en ont pas conscience, et leur vie est exclusivement tridimensionnelle.

§ 30. — Un Univers à deux dimensions.

Voici notre seconde observation.

Dans le cours de ce travail, nous avons sans cesse, pour faciliter l'intelligence d'un point de la Géométrie à quatre dimensions, cherché l'analogie dans celles à trois et à deux. Utile dans l'ordre purement géométrique, cette recherche de l'analogie ne l'est pas moins dans l'ordre concret. Descendons donc d'un degré pour comprendre quel peut être notre état d'esprit en présence de phénomènes dans lesquels la quatrième dimension interviendrait.

A cet effet, considérez l'ombre horizontale qui s'attache à vous quand vous marchez au soleil, et qui, longue ou courte, large ou grêle, répète vos mouvements comme si elle vous comprenait,

(1) Rouse Ball, *A hypothesis relative to the nature of ether and gravity* (*Messenger of mathematics*, 1891). — Même auteur : *Récréations et problèmes mathématiques*, 3e édition, traduite par Fitz-Patrick. Paris, 1898.

bien qu'elle ne soit qu'une vaine apparence. Donnez-lui l'existence et la vie; donnez-lui, avec la vie, vos sens et votre intelligence, mais sous la réserve absolue de n'en savoir user *que dans son plan*; puis disparaissez avec vos semblables en la laissant seule avec les siens. Nous appellerons cette nouvelle population les *hommes-plans,* et nous admettrons que la surface sur laquelle ils s'agitent est assez petite pour pouvoir être assimilée à un plan P. Découpez des silhouettes en papier, jetez-les sur une table P, poussez-les dans tous les sens, vous aurez une idée de ces gens, de leur support et de leur existence (1).

Ils ont, comme tous les corps qui les entourent, une épaisseur très petite, dont ils ne se doutent pas. N'exerçant leurs sens que dans le plan P, ils sont ignorants de l'espace qui les recouvre, ou, s'ils le soupçonnent, ils sont incapables de l'explorer en quoi que ce soit. Ce qu'ils appellent *espace,* c'est ce plan lui-même. Des objets qui les entourent et de ceux qui voguent dans le Ciel, ils ne connaissent que la *section* faite par lui, et ils lui donnent le même nom que celui donné par nous à l'objet lui-même. Très intelligents, la Géométrie à deux dimensions n'a point de secrets pour eux, pas plus dans ses théories les plus élevées que dans ses applications les plus pratiques; mais ils n'ont aucune idée de celle à trois, ni, *a fortiori,* de celle à quatre ; et il en est de même de toutes leurs connaissances, sur quelque sujet que ce soit.

Pour n'avoir pas affaire à une pesanteur extérieure au plan P, nous supposerons toute la masse attirante réunie au centre de la région qu'ils habitent et qu'ils appellent la *Terre.*

Tel est l'*Univers à deux dimensions* sur lequel nous invitons le lecteur à jeter les yeux, et dont nous voulons lui expliquer le mécanisme, non pas dans son ensemble encore bien compliqué, mais en nous bornant à trois des questions qui préoccupent le plus ses physiciens: les changements d'état des corps, les combi-

(1) M. René de Saussure considère aussi une *Terre* à deux dimensions; il en met les habitants, non à plat sur une face du disque, mais debout sur son pourtour. Sous l'une ou l'autre forme, les hommes-plans ont été mobilisés encore par : BELTRAMI, *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea,* — HELMHOLTZ, *Populäre Vorlesungen,* — HINTON, *Scientific Romances,* — SCHOFIELD, *Another world,* — SEELEYS, *Flatland,* ..., etc.

naisons chimiques et les décompositions. Le retour à notre propre univers sera facile et nous ne nous en occuperons même pas : puisque *le plan,* dans le sens de la *troisième* dimension, et *l'espace,* dans celui de la *quatrième,* ont la même épaisseur infiniment petite, il n'y a, dans les limites tout à fait élémentaires qui enserrent notre exposition, qu'à remplacer les deux premiers mots par les deux derniers.

§ 51. — Matière et énergie dans l'Univers à deux dimensions.

Il nous faut commencer par définir les deux éléments : *Matière* et *Énergie,* qui forment le *Système de la Nature* dans ce singulier Univers.

1° Les corps matériels disséminés dans le plan P n'ont pas une épaisseur nulle, ni infiniment petite ; nous avons déjà dit qu'avec ces qualités négatives on n'est qu'un être de raison. Ils ont une épaisseur finie très petite, formée par des atomes ou des molécules superposées. Cette épaisseur est insoupçonnée des hommes plans, pour lesquels il n'y a qu'*une* couche d'atomes, et pour lesquels les groupements d'atomes qui constituent les molécules se font *dans le plan P.* (Rien n'empêcherait, si on le préférait, de considérer de pareils corps comme des tranches faites dans les corps à trois dimensions de notre Univers ; alors le phénomène observé par l'homme-plan ne serait qu'une face de celui que nous observons nous-mêmes).

2° Tous ces corps sont soumis à une force perpendiculaire au plan P, de la nature de celles que nous appelons *forces moléculaires,* c'est-à-dire agissant en sens inverse des deux côtés opposés du plan, et produisant, soit une *traction*, soit une *compression.* Nous l'appellerons la *force perpendiculaire,* ou la *force* C. Elle ne gêne en rien les mouvements des corps, puisqu'elle est perpendiculaire à tout déplacement. Elle n'est pas autre chose qu'une des *trois* composantes des forces que nous voyons, *nous,* se jouer de part et d'autre du plan P, et sur lesquelles s'exerce notre sagacité. Les hommes-plans n'ont connaissance que des *deux autres* composantes, qui sont dans ce plan P et dont l'ensemble forme,

avec les corps plats qu'on vient de définir, l'aliment des discussions interminables auxquelles ils se livrent sur l'essence des choses et les destinées de leur Univers.

§ 52. — Les trois états des corps.

Considérons un de ces corps plats, et supposons que la force C agisse *en traction,* avec une grande intensité. Comme la barre de fer à l'épreuve de traction dans le laboratoire de l'usine, le corps s'étire et sa section diminue; ses molécules se serrent les unes contre les autres; les hommes-plans disent que c'est un *corps solide;* ils appellent *cohésion* et désignent par γ la force qui leur paraît lier les molécules ensemble.

Que la force C vienne à diminuer et, avec elle, la force γ; que celle-ci arrive à n'avoir plus qu'une intensité égale, puis inférieure à celle de la pesanteur. Les molécules se desserrent, s'étalent davantage sur le plan, deviennent de plus en plus indifférentes les unes aux autres et finalement se trouvent libres d'obéir individuellement à la pesanteur; alors le corps, se moulant sur le récipient qui le contient, n'a plus d'autre tendance que de prendre un niveau perpendiculaire à celle-ci. Il s'est *dilaté,* puis *liquéfié*.

Si la force C change de sens et exerce une *compression* croissante sur le corps que nous considérons, les molécules s'écartent encore plus et semblent maintenant se repousser. La force de la pesanteur devient négligeable devant celle de cette répulsion; on est obligé de recourir à une enceinte fermée tout autour pour empêcher une diffusion indéfinie. Les hommes-plans disent qu'ils ont affaire à *un gaz* et ils appellent *pression* ou *tension* le résultat du bombardement exécuté contre la paroi enveloppante par ces millions de molécules lancées dans toutes les directions du plan P.

Ces déplacements de molécules, qu'ils aillent ou non jusqu'au changement d'état, ne s'accomplissent pas sans des résistances opposées par leur inertie. Du jeu alternatif de ces résistances et des poussées, il résulte des agitations intestines et invisibles, dans lesquelles la force γ accomplit un certain travail, produit de son intensité par le déplacement de son point d'application. Ce travail est la seule chose qui tombe sous les sens des hommes-plans; mais, ignorant son origine, ils ne lui ont pas donné le nom

de *travail* et ne l'expriment pas en kilogrammètres; ils lui ont donné un nom particulier : *chaleur,* et ils l'expriment au moyen d'une unité factice : *degré de température.*

Si l'homme-plan applique une force F sur tout le pourtour du corps de manière à diminuer la surface que celui-ci recouvre sur le plan P, il en résulte une force égale perpendiculaire au plan, et, si celle-ci accomplit du travail, c'est-à-dire si son point d'application se déplace, on aura de la chaleur. Voilà la transformation du travail en chaleur, inverse de la précédente.

§ 53. — **Les combinaisons chimiques.**

Un homme-plan triture ensemble de la fleur de soufre et de la limaille de fer. Par cette opération, il *juxtapose* des éléments plus ou moins ténus de ces deux substances, et il pourra plus tard les séparer de nouveau par des moyens mécaniques : il fait un *mélange.*

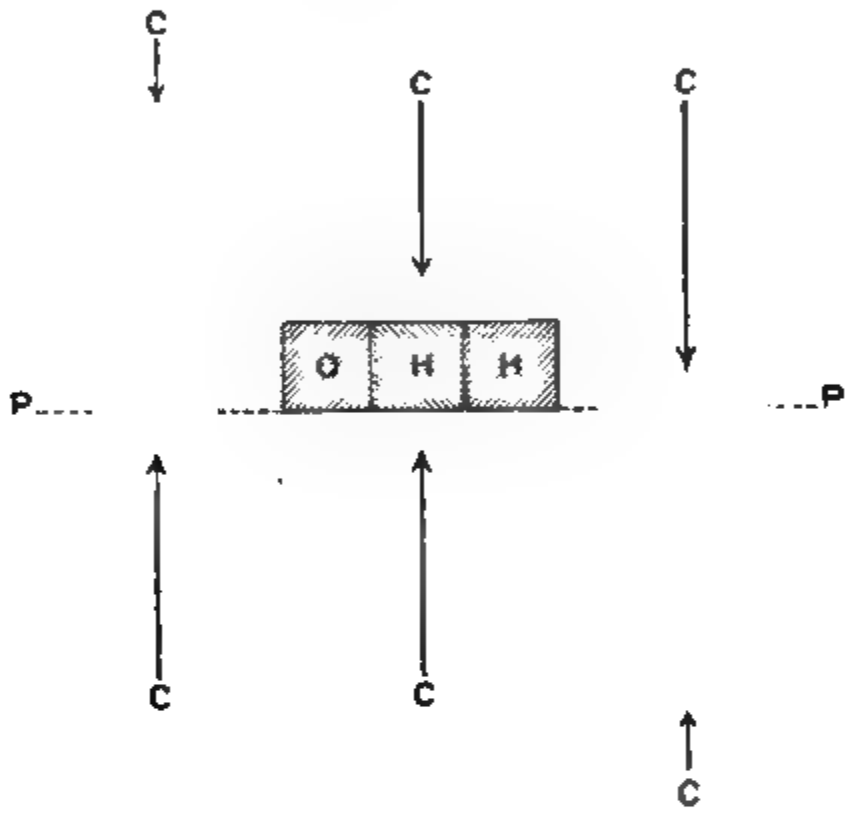
Mais que la force perpendiculaire C intervienne, et qu'elle *superpose* ces éléments dans le sens de la troisième dimension. Alors l'homme-plan, avec ses outils les plus puissants ou les plus fins, ne pourra pas les séparer, parce que son action est nulle dans ce sens; s'il parvient à opérer une division en fragments plus petits, cette division s'est faite sans sortir du plan, et chaque fragment obtenu est encore formé de molécules posées l'une sur l'autre. Il dit alors que c'est une *combinaison chimique.*

Pour obtenir une combinaison, l'expérience lui montre qu'il faut toujours développer de la chaleur. Mais il ignore que c'est la force C qui empile les éléments des corps perpendiculairement au plan P, et qu'elle jouit seule de cette faculté.

Dans cet ordre d'idées, la constitution des molécules des corps composés pourrait être indiquée par une représentation graphique de la pile moléculaire. Et comme une pareille représentation comporte deux figures symétriques pour une même composition de la molécule (*voir* les positions de gauche et de droite dans la figure 63), que ces deux figures se remplacent mutuellement par un simple retournement de la pile, que l'une peut être imaginée debout sur une face du plan P, l'autre debout sur l'autre face, on trouverait là une explication très simple du dimorphisme que présentent certains cristaux.

Chaque atome ou molécule qui, pendant que la combinaison chimique s'opère, *sort* du plan P pour aller se poser *sur* un autre atome ou molécule, laisse *un vide*. Ceux qui entourent ce vide s'y précipitent, s'y choquent, sont repoussés en arrière, y reviennent, exécutent un va-et-vient qui se transmet de proche en proche, dans toutes les directions, sous la forme d'une *onde*, comme les

Fig. 63.



vagues circulaires qui partent du point de chute d'une pierre dans l'eau et s'en éloignent en grandissant. Si la réaction chimique est suffisamment active pour que la succession des ondes se fasse entre certaines limites de rapidité que sa science a calculées, l'homme-plan les perçoit sous forme de *lumière*. C'est pour cela que la réaction chimique est souvent accompagnée de lumière et en est la condition nécessaire.

Mais les choses ne se passent pas entièrement dans le plan P. Si nous revenons à la comparaison de la pierre tombant dans l'eau, nous voyons que la surface de celle-ci s'est couverte de rides circulaires. Ces rides proviennent de ce que les compressions et les dilatations qui se succèdent sur une circonférence ayant le point de chute pour centre, ont pour conséquence, les premières une élévation des molécules au-dessus de la surface de

l'eau tout le long de cette circonférence, les secondes une dépression au-dessous; de plus, chaque molécule ne marche pas avec l'onde, mais reste toujours à la même distance du point central. Il en est de même pour les ondes calorifiques et lumineuses : tandis que les forces élastiques se transmettent de proche en proche dans le plan P, les mouvements moléculaires se font perpendiculairement à ce plan, c'est-à-dire *empruntent la troisième dimension*. Celle-ci se trouve donc en jeu, non seulement en ce qui concerne la cause, mais encore en ce qui concerne la modalité du phénomène, et les hommes-plans ne soupçonnent, ni l'un, ni l'autre fait. Et c'est aussi le point dont il faut bien voir la correspondance dans le champ supérieur.

§ 54. — Les décompositions chimiques.

Lorsque s'opère une décomposition, c'est qu'un atome ou une molécule faisant partie d'une pile perpendiculaire au plan P en est retirée et est rejetée dans ce plan, puisque c'est la différence entre ces deux positions qui constitue la différence entre l'état de combinaison et celui de mélange. En y prenant place, elle repousse celles qui entourent le point de chute; celles-ci reviennent après avoir communiqué du mouvement derrière elles, sont repoussées de nouveau, et les mêmes mouvements alternatifs ont lieu que dans le cas précédent, produisant, suivant les circonstances, de la chaleur, ou de la chaleur accompagnée de lumière.

On sait que l'*électricité* est le principal agent de décomposition chimique. Pour quelqu'un dominant le plan P et pouvant le regarder comme il lui plaît, le mouvement expliquant le mieux les phénomènes rangés par ses habitants sous cette rubrique est peut-être *une rotation de la pile moléculaire* autour d'un axe situé dans ce plan, mouvement que ceux-ci ne sauraient s'imaginer.

Ce mouvement peut produire de la chaleur et de la lumière, puisque, à chaque rotation entière, le plan P est traversé par des atomes en deux points symétriquement placés par rapport à l'axe de la pile ; il en résulte des ondes auxquelles cette circonstance donne un cachet particulier, et qui produiront en outre les manifestations électriques, sous certaines conditions de vitesse ou autres.

Il peut aussi produire des décompositions chimiques, et voici comment. Considérons une pile formée de deux atomes H d'hydrogène et un O d'oxygène ; c'est un *molécule d'eau,* que nous prenons au milieu d'une multitude de molécules pareilles, placées dans les mêmes conditions. Au moment où la rotation que nous supposons amène cette pile dans le plan P, les atomes ne sont plus serrés par la force C et ne tiennent plus ensemble ; ils sont un instant dans l'état qui correspond au *mélange* et non plus dans celui qui correspond à la *combinaison.* A chaque demi-rotation, c'est en quelque sorte une combinaison qui se défait et se refait. Qu'une circonstance quelconque, par exemple ce simple fait que la force centrifuge n'est plus annihilée par la pression C, écarte les molécules au moment du passage dans le plan, la rotation ne peut pas se continuer, et l'on trouve séparément deux atomes d'hydrogène d'une part, un d'oxygène de l'autre ; on appelle *pôle négatif,* la direction dans laquelle la *culbute* (ce mot convient mieux maintenant que celui de *rotation*) a fait tomber les premiers, *pôle positif,* celle qui est échue au second ; ce sont la droite et la gauche de la position du milieu dans la figure ci-dessus.

Ainsi s'expliquerait très simplement l'aptitude caractéristique de l'électricité à produire des décompositions chimiques.

CHAPITRE X.

HORS DE L'ÉTENDUE.

§ 55. — **Les perpendiculaires.**

Le lecteur a donc fait connaissance avec l'*Étendue,* ce champ du quatrième degré formé d'une multitude quatre fois infinie d'espaces, parmi lesquels le nôtre se trouve. Il en a jusqu'ici respecté scrupuleusement les frontières; pour terminer, nous l'invitons à les franchir une fois, et résolument.

Rien n'empêche, disions-nous dans l'Avant-Propos, de considérer l'étendue comme n'étant aussi qu'une unité au milieu d'une

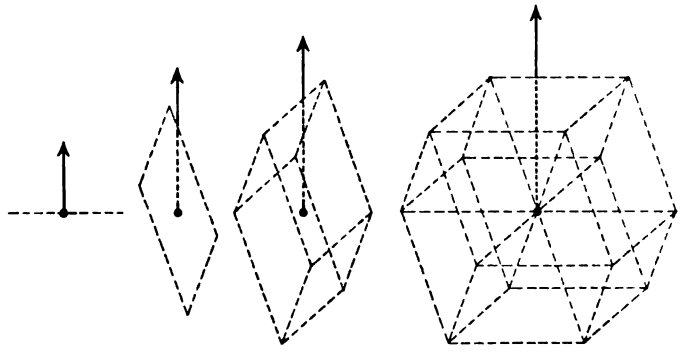


Fig. 64. — Les quatre premiers champs et leur perpendiculaire.

infinité d'autres pareilles, toutes ensemble formant un champ du cinquième degré; *et ainsi de suite indéfiniment.* En vertu de ces cinq mots si usuels et qui paraissent si simples, et en nous aidant de ce que les Chapitres précédents nous ont appris, pénétrons dans l'immense et mystérieux domaine.

A cet effet (*fig.* 64) :

1° Menez à l'endroit où vous êtes deux lignes droites perpendiculaires entre elles. Vous n'avez que l'embarras du choix, car il est facile de voir, par le raisonnement employé § 8, que le nombre de systèmes birectangulaires qu'on peut établir en un point donné de l'espace à trois dimensions s'exprime par l'infini élevé à la troisième puissance. Mais, le choix une fois fait, toutes les opérations que nous allons indiquer s'ensuivent sans aucune indétermination. Nous supposerons, uniquement pour fixer les idées, que les deux lignes droites choisies par vous sont les deux horizontales *nord-sud* et *est-ouest*.

2° Menez une troisième ligne qui soit perpendiculaire à ces deux-là. Il y en a une et rien qu'une, qui est la verticale du lieu. En vous élevant sur celle-ci, comme l'oiseau ou le ballon, vous traverseriez une suite de plans horizontaux. Ce serait la même chose si vous preniez toute autre direction faisant avec elle un angle différent de 90°, mais avec cet angle particulier, vous resteriez dans le plan horizontal, qui est le lieu de toutes les lignes menées perpendiculairement à la verticale par le point où vous êtes.

3° Menez une quatrième ligne qui soit perpendiculaire à chacune des trois premières ; c'est le problème qui a été résolu § 14 et rappelé une première fois § 20 ; vous trouverez toujours une direction et rien qu'une ; et si une autre personne, en quelque autre endroit de l'Univers, faisait de son côté la même opération que vous, elle trouverait aussi une direction unique, qui serait parallèle à la vôtre. Marchez sur la ligne ainsi trouvée, vous serez dans l'étendue, et vous traverserez une suite d'espaces parallèles au nôtre. Ce serait la même chose si, au lieu de cette ligne, vous en preniez une autre faisant avec elle un angle différent de 90° ; mais avec celui-ci, vous resteriez dans notre espace, qui est le lieu de toutes les perpendiculaires qu'on peut lui mener par l'endroit d'où vous partez (§ 14).

4° Vous arrêtant à un point quelconque, ou revenant au point de départ, menez une cinquième direction perpendiculaire aux quatre premières. Elle est unique et déterminée ; vous l'obtiendrez par l'intersection de quatre étendues comme vous avez obtenu la précédente par l'intersection de trois espaces (§ 14, II),

l'antéprécédente par l'intersection de deux plans. Suivez-la à son tour; vous serez dans le champ du cinquième degré et vous traverserez des étendues.

5° Revenez encore au point de départ. Menez une sixième direction, etc.

La figure 64 correspond aux quatre premiers cas : elle voudrait montrer un point mobile s'élevant perpendiculairement aux champs du premier, du deuxième, du troisième et du quatrième degré, représentés respectivement par les projections d'un segment de droite, d'un carré, d'un cube et d'un octaédroïde (1).

Chacune des directions que vous trouvez ainsi l'une après l'autre est perpendiculaire, non seulement au dernier champ sur lequel vous avez fait la construction géométrique, mais encore à tous les champs précédents; elle se projette par un point unique, et sur notre espace, et sur le plan horizontal par lequel vous avez commencé.

Les champs que vous visitez successivement sont caractérisés chacun par le nombre de directions perpendiculaires entre elles qu'on y peut mener en chaque point, ou, ce qui revient au même, par la possibilité d'y établir un système de coordonnées *autant de fois rectangulaire* qu'il y a d'unités dans le degré du champ. Les éléments de ce système de coordonnées ne sont autre chose que ceux du champ de degré immédiatement inférieur : c'est le rôle qu'en commençant nous avons vu prendre par les droites pour le champ appelé *plan,* les plans pour celui appelé *espace,* les espaces pour celui appelé *étendue.*

Chaque fois, vous voyez changer le régime des intersections. Au cinquième champ, par exemple, qui a pour éléments : des points o, des droites d, des plans p, des espaces s, et des étendues t, vous voyez que :

Deux, trois, quatre, cinq étendues t ont respectivement pour intersection un espace, un plan, une droite, un point;

Une étendue t a pour intersection avec un espace s, avec un

(1) La dernière figure est la projection de l'octaédroïde sur un des plans de l'espace perpendiculaire à une première diagonale, et se déduit aisément de la figure 23 (p. 119).

plan p, avec une droite d, respectivement : un plan, une droite, un point;

Deux espaces s se coupent généralement suivant une droite; un espace s et un plan p, suivant un point;

Un espace s et une droite d ne se rencontrent généralement pas; il en est de même de deux plans;

Un plan p et une droite d sont toujours dans une même étendue; il en est de même de deux droites.

Ce cinquième champ et le suivant ont été le théâtre de spéculations importantes intéressant notre propre espace. Nous citerons en particulier les travaux de Véronèse et de Segre (1).

§ 56. — Le champ de degré n.

Le mathématicien, ne se contentant plus des géométries particulières que nous connaissons pour les premiers champs, a fait celle d'un champ *quelconque*, sans le particulariser autrement qu'en le désignant par la lettre n, effroi du profane : c'est ce qu'on appelle la *Géométrie à n dimensions*, expression qui paraît avoir été employée pour la première fois par Cayley (2). Cette Géométrie est le principal théâtre de deux branches des plus difficiles et d'un grand intérêt philosophique.

L'une s'appelle la *Géométrie énumérative* (*Abzählende Geometrie*) et s'occupe de la recherche du nombre des êtres géométriques satisfaisant à des conditions données; les fondements en ont été posés par Shubert, Chasles, Halphen et Zeuthen (3).

---

(1) VERONESE, *La superficie omaloïde normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni* (*Accad. dei Lincei*, 3e série, 1884).

SEGRE, *Sulla Geometria della retta et delle sue serie quadratiche* (*Mémoires de Turin*, 2e série, 1884).

(2) *Chapters in the analytical geometry of n dimensions* (*Cambridge and Dublin Math. Journ.*, 1845).

(3) SHUBERT, *Kalkül der abzhälenden Geometrie*. Leipzig, 1870.

SHUBERT, *Die n-dimensionale Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes* (*Math. Ann.*, 1886).

SHUBERT, *Anzahlbestimmungen für lineare Räume belibieger Dimension* (*Acta Math.*, 1886).

SHUBERT, *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume* (*Math. Ann.*, 1894).

L'autre porte le nom d'*Analysis situs,* qui est devenu d'usage courant depuis Riemann, mais que Riemann a pu prendre dans Gauss, celui-ci dans Kant, et celui-ci dans Leibnitz. L'on trouve en effet dans les Œuvres de ce dernier, pour ne citer que lui, un Chapitre intitulé : *III. De Analysi situs* et commençant ainsi : *Quæ vulgo celebratur Analysis mathematica, est magnitudinis, non situs.* (Édition Gerhardt, t. V, p. 178.)

Cette branche s'occupe des relations entre les êtres géométriques, non au point de vue de la grandeur, mais au point de vue de la forme, et l'un de ses principaux objets est l'étude des *connexions,* dont nous devons donner au moins la définition.

Considérons dans le $n^{\text{ième}}$ champ $(x_1 x_2 \dots x_n)$ un ensemble continu de points dépendant de $n-m$ paramètres : c'est ce que nous avons appelé § 11 une *multiplicité* — dans la théorie actuelle, on dit de préférence, une *variété — de degré* $n-m$. Elle sera définie par m équations de la forme

$$F_i(x_1 x_2 \dots x_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

accompagnées d'un certain nombre p d'inégalités

$$\varphi_j(x_1 x_2 \dots x_n) \gtrless 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, p).$$

On dit que cette variété est *linéairement connexe,* si l'on peut joindre par une ligne continue, sans en sortir, deux quelconques de ses points; si ce n'est pas le cas, la variété pourra être décomposée en d'autres linéairement connexes.

Fondée par Riemann et Betti, l'*Analysis situs* a sa principale expression dans un Ouvrage de M. Poincaré, publié en 1895 (1).

La formule d'Euler (§ 37) n'est vraie que pour les polyèdres,

---

HALPHEN, *Recherches de Géométrie à n dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* 1873).

SCHOUTE, *Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions, étude de géométrie énumérative* (*Académie des Sciences d'Amsterdam,* juin 1900).

(1) RIEMANN, *Œuvres mathématiques,* traduites par Laugel. Paris, 1898; p. 414-419.

BETTI, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (*Ann. di Matem.,* 1871, p. 140-158).

POINCARÉ, *Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique,* 1895, p. 1 à 125). — La publication de 1895 a eu trois continuations importantes : la première dans *Rendic. di Palermo,* 1899, p. 285-343; la seconde dans *Proce-*

polyédroïdes, etc., qui sont linéairement connexes; les solides satisfaisant à cette condition ont été appelés *solides euléricns.*

Toutes les questions que le quatrième champ nous a présentées se retrouvent avec plus d'ampleur dans le $n^{ième}$. Nous reviendrons sur deux des plus difficiles, celle des angles (§ 26) et celle des corps réguliers (§ 38), mais en nous contentant de dégager les résultats, pour aider dans l'étude des auteurs auxquels nous renvoyons.

I. *Angles de deux champs.* — Deux champs A et B, le premier de degré a, le second de degré b, faisant partie du $n^{ième}$ champ, ont pour intersection un champ C_m dont le degré m est

$$m = a + b - n;$$

si $n = a + b$, l'intersection est un point; si $n > a + b$, les deux champs n'ont aucun point commun.

1° Envisageant d'abord le cas $n = a + b$, nous commençons par psuposer que n est un nombre pair $2p$, et que les deux champs considérés A, B sont du même degré $a = b = p$, conditions correspondant tout à fait à celles qui font l'objet du § 26. Alors : On peut mener par le point d'intersection O, dans chacun des deux champs A, B, p droites perpendiculaires entre elles

$$\begin{aligned} &a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_p \quad \text{dans A,} \\ &b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots, \quad b_p \quad \text{dans B,} \end{aligned}$$

dont chacune est la projection orthogonale de celle qui est écrite au-dessus ou au-dessous, c'est-à-dire qui a le même indice. Deux droites ayant le même indice font ensemble un angle plan, ce qui en fait p, et ces p angles sont *les angles que les deux espaces* A, B *font entre eux;* ce sont des *invariants.* Deux droites quelconques n'ayant pas le même indice font ensemble un angle droit. Le plan d'un quelconque des p angles du premier groupe

---

dings of the London Mat. Soc., 1901, p. 277-308); la troisième dans le *Bull. de la Soc. math. de France,* t. XXX, 1902, p. 49-70.

PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Paris, 1897. (Le Chapitre II de cet Ouvrage.)

WALTHER DYCK, *Beiträge zur « Analysis situs »* (*Berichte der Sachs. Gesells. d. Wiss.*, 1885, p. 86 et 87; et *Math. Ann.*, 1890, 1893).

est perpendiculaire aux deux plans A, B et au plan d'un quelconque de ces angles droits.

2° n étant pair ou impair, mais a et b satisfaisant toujours à la condition $a+b=n$, soit a le plus petit des deux; alors le champ A a pour projection orthogonale sur B un champ A′ de degré a, et les deux champs A, B ont les mêmes angles que A, A′, en nombre a.

3° Si $m=a+b-n>0$, les deux champs A, B n'ont plus pour intersection un point, mais un champ C_m; alors m de leurs angles ont la valeur *zéro* (1).

II. *Les corps réguliers.* — On a dû être frappé, § 38, de l'anomalie que présente le nombre des solides réguliers existants dans les premiers champs : *infini* dans la Géométrie à deux dimensions, ce nombre n'est plus que *cinq* dans celle à trois, et il passe à *six* dans celle à quatre. La conception de pareils corps peut être étendue de champ en champ : avec les polyédroïdes réguliers du quatrième comme figures limitantes, on cherchera à en former dans le cinquième, et ainsi de suite. Alors l'anomalie constatée ne se conserve pas, et le nombre dont il s'agit demeure invariablement *trois,* à partir du cinquième champ; nous ignorons à quel fait général se rattache l'existence de deux corps en plus dans le troisième champ (l'icosaèdre et le dodécaèdre), et de trois dans le quatrième (le C^{24}, le C^{120} et le C^{600}); mais nous avons expliqué (§ 44) pourquoi il y en a un de plus dans celui-ci que dans celui-là.

Il s'établit donc trois séries qui ont respectivement pour terme général C^{n+1}, C^{2n}, C^{2^n}, et dont le Tableau suivant montre les premiers termes, ces deux exceptions étant laissées de côté; elles ont été reconnues par Stringham dès 1880.

---

(1) Voyez :

JORDAN, *Bulletin de la Société mathématique,* 1875, p. 125.

CASSANI, *Gli angoli degli Spazi lineari* (*Rendiconti dei Lincei,* I, p. 1885; *Giornale di Battaglini,* 1885, et *Atti dell' Ist. veneto,* 1895).

CASTELNUOVO, *Angoli di due Spazi contenuti nello Spazio a n dimensioni Atti dell' Ist. veneto,* 1885. [Cet Auteur établit élégamment la réalité des angles (*voyez* § 26, à la fin)].

BRUNEL, *Propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions* (*Math. Ann.,* t. XIX, 1882, p. 39).

	DEGRÉ DES CHAMPS.	DÉSIGNATION DES SOLIDES.	NOMBRE DE FIGURES LIMITANTES : sommets.	arêtes.	faces.	cases.	à 4 dim.	à 5 dim.	à 6 dim.
Série du tétraèdre.	2	triangle	3	3					
	3	tétraèdre	4	6	4				
	4	C^5	5	10	10	5			
	5	C^6	6	15	20	15	6		
	6	C^7	7	21	35	35	21	7	
	7	C^8	8	28	56	70	56	28	8
Série du cube.	2	carré	4	4					
	3	cube	8	12	6				
	4	C^8	16	32	24	8			
	5	C^{10}	32	80	80	40	10		
	6	C^{12}	64	192	240	160	60	12	
	7	C^{14}	128	448	672	560	280	84	14
Série de l'octaèdre.	2	carré	4	4					
	3	octaèdre	6	12	8				
	4	C^8	8	24	32	16			
	5	C^{16}	10	40	80	80	32		
	6	C^{32}	12	60	160	240	192	64	
	7	C^{64}	14	84	280	560	672	448	128

Ce Tableau offre de beaux exemples de dualité (§§ 19 et 47). On y reconnaît: 1° que toute figure de la première série est corrélative d'elle-même, car chaque ligne donne le même résultat quand on la lit de gauche à droite ou de droite à gauche; 2° que deux figures, une de la deuxième série et une de la troisième, situées dans le même champ, sont corrélatives l'une de l'autre, car on a le même résultat quand on lit une des deux lignes de gauche à droite et l'autre de droite à gauche. L'on voit en outre de quelle différente manière la correspondance dualistique s'établit entre les champs subalternes suivant que le degré du champ fondamental est pair ou impair. Si les premiers sont de degrés m et m', ils sont corrélatifs quand on a $m + m' = n - 1$.

Puisque nous sommes dans le $n^{\text{ième}}$ champ, il faut bien pousser le Tableau jusqu'à lui et donner les formules qui lui sont relatives (1).

(1) Après Stringham, la question a été étudiée par: — SCHLEGEL, *Quelques*

Ses trois corps réguliers

$$C^{n+1}, \quad C^{2n}, \quad C^{2^n}$$

sont limités par des solides de même type ayant $n-1$ dimensions, ceux-ci par d'autres en ayant $n-2$, et ainsi de suite jusqu'aux quatre derniers échelons qui sont des cases, des faces, des arêtes et des sommets. Le nombre de ceux qui ont k dimensions est, pour les trois types:

$$\frac{2^{n-k}n!}{k!(n-k)!}, \quad \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}, \quad \frac{2^{k+1}n!}{(k+1)!(n-k+1)!},$$

$k!$ désignant la factorielle $1.2.3\ldots k$.

Les sommets sont sur une sphère à n dimensions dont le rayon est, pour les trois cas, en désignant l'arête par a,

$$a\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}, \quad a\sqrt{\frac{n}{2}}, \quad \frac{a}{\sqrt{2}};$$

quand n augmente indéfiniment, le rapport du rayon à l'arête augmente de même pour le deuxième corps, conserve une valeur constante pour le troisième, et tend vers cette même valeur pour le premier.

Les meilleurs endroits pour étudier la géométrie à n dimensions nous paraissent être les suivants:

1° Le Mémoire de C. Jordan, déjà cité bien des fois (*Bulletin de la Soc. Math.*, 1875, page 103-181).

2° D'Ovidio, *Le funzione metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (*Memorie dei Lincei*, série III, vol. I, année 1877, p. 929-986).

---

théorèmes de Géométrie à n dimensions (*Bull. de la Soc. Math. de Fr.*, 1882, p. 172-207). — Biermann, *Ueber die regelmässige Körper höherer Dimension* (*Acad. des Sci. de Vienne*, 1884, p. 144-159). — Puchta, *Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimension* (*Id.*, p. 168-185). — Schoute, *Voordracht over de regelmatige Lichamen in Ruimte van meer dimensies* dans *Algemeine Vergadering van het deerde natuur-en Scheikundig Congres te Utrecht*, avril 1891).

[Le Tableau de la page précédente est emprunté en grande partie à Proctor Hall, *The Projections of fourfold Figures upon a three-flat* (*Amer. Journ. of Math.*, t. XV, 1893)].

3° VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip der Projicirens und Schneidens* (*Math. Ann.*, t. XIX, année 1882, p. 161-234).

§ 57. — Le champ de degré infini.

Et après? Pouvons-nous, sans que jamais cette opération de notre pensée rencontre d'obstacle, accumuler toujours les perpendiculaires autour de nous, et multiplier *à l'infini* ces champs, dont chacun en contient déjà tant d'infinités? Pouvons-nous entrevoir cette étendue dernière, vers laquelle il semble, non que tout converge, mais que tout diverge, dans laquelle les corps auraient un nombre infini de dimensions, où des choses correspondant à nos surfaces et à nos volumes, le contenant et le contenu, seraient homogènes entre elles? Pouvons-nous seulement y penser avec la même tranquillité qu'aux infinis des plans et des espaces (§ 7), et espérer en tirer, comme de ceux-ci, un parti géométrique quelconque?

Il semble que cet infini des infinis doive être aussi celui de l'imprécision et de la confusion, qu'on n'y puisse rien concevoir, pas même un système de cordonnées, sans que l'objet de la pensée s'écroule aussitôt. Voici, cependant, un résultat des plus curieux, qui a été signalé par M. Heyl, de Philadelphie (¹).

Nous avons donné (§ 33) les formules qui expriment le contenu A et le contenant B de la circonférence, de la sphère et de l'hypersphère. Les champs de degré plus élevé nous présentent chacun un corps analogue, lieu des points également distants d'un point donné. Il est facile d'étendre à ces corps les formules du § 33, soit successivement de champ en champ à partir du quatrième, soit par une expression générale contenant le nombre n (²).

Sans recommencer à faire des calculs, nous remarquerons que la relation intéressante constatée alors entre les A et les B se conserve comme une sorte de loi générale, et permet de passer faci-

---

(¹) HEYL, *Properties of the locus r = constant in space of n dimensions.* Philadelphie, 1897.

(²) *Voyez* BIERMANN, *Wiener Sitzungsberichte*, 1884, p. 154.

lement des uns aux autres : elle consiste en ce que *le contenu* A *est égal au contenant* B *multiplié par le rayon et divisé par le degré du champ.* Aussi nous donnerons dans un Tableau numérique quelques valeurs de la première fonction seulement ; ensuite nous rapprocherons dans un Tableau graphique les deux fonctions, le contenu et le contenant.

Ces Tableaux supposent le rayon r pris pour unité. Il importe de remarquer que cette particularisation entraîne la fixation de l'unité, qui sera

pour les A : le mètre élevé à la puissance n,
pour les B : le mètre élevé à la puissance $n-1$,

n étant le degré du champ : c'est un point qu'on n'a pas le droit de perdre de vue lorsqu'on songe à faire croître n indéfiniment.

Voici d'abord le Tableau numérique :

VALEURS paires de n.	VALEURS DE A.	VALEURS impaires de n.	VALEURS DE A.
2.....	$\pi = 3,142$	3.....	$\frac{4\pi}{3} = 4,189$
4.....	$\frac{\pi^2}{2} = 4,936$	5.....	$\frac{8\pi^2}{15} = 5,264$
6.....	$\frac{\pi^3}{6} = 5,170$	7.....	$\frac{16\pi^3}{105} = 4,725$
8.....	$\frac{\pi^4}{24} = 4,061$	9.....	$\frac{32\pi^4}{945} = 3,299$
12.....	$\frac{\pi^6}{720} = 1,336$	11.....	$\frac{64\pi^5}{10395} = 1,885$
16.....	$\frac{\pi^8}{40320} = 0,2351$	15.....	$\frac{256\pi^7}{2027025} = 0,3816$
20.....	$\frac{\pi^{10}}{3628800} = 0,0258$	19.....	$\frac{1024\pi^9}{654729075} = 0,0466$
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
$2n$.....	$\frac{\pi r^2}{1}\cdot\frac{\pi r^2}{2}\cdot\frac{\pi r^2}{3}\cdots\frac{\pi r^2}{n}$	$2n-1$..	$\frac{2}{\pi r}\cdot\frac{\pi r^2}{1}\cdot\frac{\pi r^2}{3}\cdots\frac{\pi r^2}{2n-1}$
.....	.....	.....	.....

Les valeurs vont d'abord en croissant, atteignent un maximum qui est relativement près de nous, puisqu'il a lieu dans le champ du cinquième degré pour les A, celui du septième pour les B,

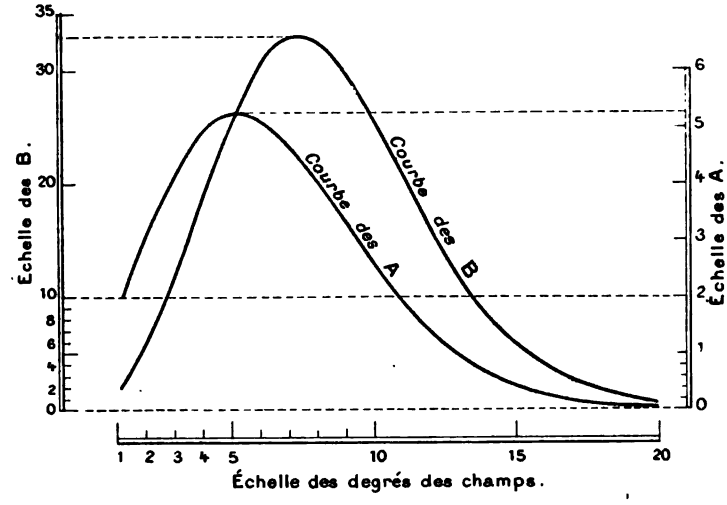
puis elles diminuent et convergent rapidement vers zéro sous la forme asymptotique. Le fait s'explique tout naturellement par ceci que le facteur au moyen duquel on passe d'un terme de A au suivant va en croissant tant que son dénominateur

$$2n \quad \text{ou} \quad 2n-1$$

est moindre que le numérateur πr^2, et va ensuite en décroissant indéfiniment.

On voit donc que, si le degré du champ augmente au delà de toute limite, le nombre abstrait qui exprime le contenu, comme

Fig 65.



celui qui exprime le contenant, *tendent avec une marche régulière vers une limite parfaitement déterminée, qui est zéro pour l'un et l'autre.* Mais que deviennent les nombres concrets, c'est-à-dire les produits des deux unités par ces nombres abstraits? Est-ce o, ou $\frac{0}{0}$, ou ∞, ou un nombre déterminé? Nous laissons au lecteur le soin de faire cette recherche, qui le jettera, croyons-nous, dans les fonctions Gamma de Legendre.

L'inspection du Tableau graphique suggère deux réflexions.

La première est que, au lieu de l'indétermination que nous

redoutions, nous rencontrons une de ces convergences rapides que présentent quelquefois les cas d'asymptotisme, par exemple la fameuse courbe de la *loi de probabilité des erreurs des observations,* dont l'équation est (1)

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Nos deux courbes ont la même forme que celle-là. Après leur point culminant, elles changent le sens de leur courbure, puis s'approchent très vite de l'axe des abscisses, et finissent par se confondre avec lui à nos yeux. A partir d'un endroit qui dépasse à peine l'abscisse 20, nous pouvons *pratiquement* leur substituer celui-ci, *au moins en ce qui concerne la question actuelle;* alors les champs successifs ne diffèrent plus les uns des autres jusqu'à l'infini. Il serait intéressant de faire une étude spéciale des formes géométriques dans ce champ unique en lequel ils finissent tous par se confondre.

La seconde réflexion résulte de la continuité parfaite des courbes. On y peut mesurer les ordonnées qui correspondent à des valeurs quelconques de n, *entières* ou *fractionnaires.* Que signifient ces dernières, qu'on peut aussi calculer au moyen des formules, tout comme les premières, avec telle approximation que l'on voudra? Le géomètre va-t-il se trouver amené à considérer des *champs de degré fractionnaire,* comme il le fut, à son grand étonnement, le lendemain de l'invention de la notation exponentielle, à considérer des *puissances à degré fractionnaire?*

(1) *Voyez* notre Ouvrage: *Sur la probabilité du tir des bouches à feu et la Méthode des moindres carrés.* Paris, 1875.

ERRATA.

—

Page 4, ligne 12 en remontant. — *Au lieu de* (3), *lire* (2).

Page 21, ligne 15. — *Après* point, *ajouter* dans un plan donné.

» ligne 16. — *Après* droite, *ajouter* dans un espace donné.

» ligne 22. — *Après* point, *ajouter* dans un espace donné.

Page 65 (*fig.* 8). — Mettre le numérotage des axes, dans la figure de droite, en concordance avec la formule qui fait la dernière ligne de la même page.

Page 71 (*fig.* 10). — Remplacer (A) par (A′) dans l'angle $x_3 O x_4$.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET SCIENTIFIQUES

MENTIONNÉS DANS

LE COURS DE L'OUVRAGE ET ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES POUR LES DÉSIGNER.

Acta math. — Acta mathematica, rédigé par Mittag-Leffler; in-4. Stockholm.

American Journ. of Math. — American Journal of mathematics, edited by Thomas Craig, with the cooperation of S. Newcomb, under the auspices of the John Hopkins University; in-4. Baltimore.

Ann. de Gergonne. — Annales de Mathématiques pures et appliquées, publiées par Gergonne; in-4. Nismes (de 1810 à 1831).

Ann. de l'Éc. norm. sup. — Annales scientifiques de l'École normale supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique par un comité de rédaction composé des maîtres de conférences de l'École; in-4. Paris.

Ann. de l'Éc. norm. sup. de Pise. — Annali della r. Scuola superiore di Pisa; in-8. Pise.

Ann. di matematica. — Annali di matematica pura ed applicata, diretti dal professore F. Brioschi colla cooperazione dei prof. Cremona, Beltrami, Dini; in-4. Milan.

Archives de Grünert. — Archiv der Mathematic und Physik, mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von Grünert, fortgesetzt von Hoppe; in-8. Leipzig.

Ass. fr. p. l'avanc. des Sci. — Association française pour l'avance-

ment des Sciences; fusionnée avec l'Association scientifique de France; Comptes rendus des sessions; in-8. Paris.

Bull. des Sc. math. — Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par MM. Darboux et Tannery, sous la direction de la Commission des hautes études; in-8. Paris.

Bull. de la Soc. math. — Bulletin de la Société mathématique de France, publié par MM. les Secrétaires; in-8. Paris.

Bull. of the amer. math. Soc. — Bulletin of the american mathematical Society, continuation of the Bulletin of the New-York math. Soc., edited by Fiske, Ziwet, Modley, Cole, etc.; in-8. New-York.

C. R. de l'Acad. des Sc. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; in-4. Paris.

L'Enseign. math. — L'Enseignement mathématique, Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs : Laisant et Fehr; in-8. Paris.

Giornale di Battaglini. — Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle Università italiane, fondato nel 1863, proseguito dal prof. Capelli; grand in-8. Naples.

Istituto veneto. — Atti del reale Istituto veneto di Scienze, lettere ed arti; in-12. Venise.

Journal de Crelle. — Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von Crelle 1826, forgesetzt von Fuchs; in-4. Berlin.

Journ. de l'Éc. Polyt. — Journal de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'administration de cet établissement; in-4. Paris.

Leopoldina Nova Acta. — Nova acta Academiæ Cesareæ Leopoldino-Carolinæ germanicæ naturæ curiosorum; in-4. Halle a. S.

Math. Annalen. — Mathematische Annalen, in Verbindung mit Neumann begründet durch Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren Gordan, Neumann, Noether, von der Mühll, Weber, gegenwärtig herausgegeben von Klein, Walter Dyck und Mayer; in-8. Leipzig.

Mathesis. — Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles

spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par Mansion et Neuberg; in-4. Gand et Paris.

Mémoires d'Amsterdam. — Voyez plus loin : *Verhandlingen.*

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux; grand in-8. Bordeaux.

Mémoires de Turin. — Memorie della reale Accademia delle Scienze di Torino; in-4. Turin.

Memorie dei Lincei. — Memorie della r. Accademia dei Lincei; grand in-4. Roma.

Messenger of Mathematics. — In-8, Cambridge.

Monatsberichte. — Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; in-4. Berlin.

Nieuw Archief. — Nieuw Archief voor wiskundige uitgegeven door het wiskundig Genootschap te Amsterdam, omler Redactie von Kluyver, Korteweg en Schoute; in-8. Amsterdam.

Nouv. Ann. — Nouvelles Annales de Mathématiques, journal des Candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation, rédigé par Laisant et Antomari; in-8. Paris.

Novi Comm. Petrop. — Novi commentarii academiæ cientiarum. Imp. Petropolitaneæ; in-4. Saint-Pétersbourg.

Philosophical Magazine. — The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science, conducted by Lord Kelvin, Fitzgerald and Francis; in-8. London.

Proceedings of Irish Academy. — In-8. Dublin.

Proceedings of the London mathematical Society. — In-8. London.

Rendic. di Palermo. — Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; grand in-8. Palerme.

Rev. gén. des Sci. — Revue générale des Sciences pures et appliquées, dirigée par Olivier; grand in-8. Paris.

Rev. phil. — Revue philosophique de la France et de l'étranger, dirigée par Th. Ribot; in-8. Paris.

Rev. scientifique. — Revue scientifique (Revue rose) paraissant le samedi, fondée en 1863; directeur : J. Héricourt, in-4. Paris.

Sitzungsb. de l'Ac. des Sc. de Munich. — Sitzungsberichte der math. physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München; in-4. Munich.

Sitzungsb. de l'Ac. des Sc. de Vienne. — Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien; in-4. Vienne.

Verhandlingen te Amsterdam. — Verhandlingen der koninklijke Akademie van Wettenshapen te Amsterdam; eerste Sectie; grand in-8. Amsterdam.

Zeitschrift für Philosophie. — Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, gegründet von Fichte und Ulrici, redigirt von Krohn und Falkenberg; in-8. Halle a. S.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

AVANT-PROPOS.

Pages.

I. La Conception des champs successifs V
II La non-perception des êtres à quatre dimensions VIII
III. Les applications mathématiques XVII
IV. Les applications physiques XX
V. Programme de l'Ouvrage XXIII

CHAPITRE I.

Définitions.

1. Les champs 1
2. Espaces générateurs 4
3. Conditions déterminatives 5

CHAPITRE II.

Intersections et parallélisme.

4. Un espace et les autres champs 9
5. Deux plans 12
6. Plans et droites 13
7. Les figures infiniment éloignées 15
8. Les multiplicités 20

CHAPITRE III.

Perpendicularité.

9. Distance de deux points 23
10. Distance d'un point à un champ 24
11. Applications 27
12. Perpendicularité de deux champs 28

CHAPITRE IV.

Quelques théorèmes.

Pages.

13. Droites, plans et espaces parallèles 31
14. Droites, plans et espaces perpendiculaires 32
15. Rotation d'un espace 38

CHAPITRE V.

Systèmes de coordonnées.

16. Les quatre espaces coordonnés 45
17. Le point géométrique et le point analytique 48
18. La loi de projectivité 49
19. La loi de dualité 51
20. Notre propre espace dans le système de coordonnées 55

CHAPITRE VI.

Les angles.

21. Dièdres d'espaces 59
22. Les trois formes classiques de l'équation d'un espace 61
23. Les trièdres 62
24. Le quadrièdre droit 63
25. La géométrie descriptive à quatre dimensions 66
26. Angles de deux plans 71
27. Plans d'angles égaux 76

CHAPITRE VII.

Les êtres de la géométrie à quatre dimensions.

28. Les lignes, les surfaces et les hypersurfaces 79
29. L'hypervolume 82
30. Quadriques et quartiques 83
31. L'hypersphère 85
32. L'hypersphère (suite); pôles et polaires 88
33. L'hypersphère (suite); contenu et contenant 89
34. Les cônes 91
35. L'échelle des êtres géométriques 93

CHAPITRE VIII.

Les polyédroïdes.

Pages.

36. Généralités 95
37. Formule d'Euler 99
38. La question des polyédroïdes réguliers 102
39. Arêtes et sommets 107
40. Établissement des coordonnées 114
41. L'octaédroïde, ou hypercube 118
42. L'hexadécaédroïde 128
43. Le pentaédroïde 132
44. L'icosatétraédroïde 137
45. Construction de l'icosatétraédroïde 148
46. L'hexacosiédroïde et l'hécatonicosaédroïde 170
47. Dualité 178

CHAPITRE IX.

Applications.

48. L'axiome des trois dimensions 181
49. Récapitulation des qualités de l'espace 183
50. Un Univers à deux dimensions 186
51. Matière et Énergie dans l'Univers à deux dimensions 187
52. Les trois états des corps 188
53. Les combinaisons chimiques 189
54. Les décompositions chimiques 191

CHAPITRE X.

Hors de l'étendue.

55. Les perpendiculaires 195
56. Le champ de degré n 198
57. Le champ de degré infini 204

ERRATA 208

RECUEILS ACADÉMIQUES ET SCIENTIFIQUES MENTIONNÉS DANS LE COURS DE L'OUVRAGE ET ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES POUR LES DÉSIGNER 209

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

32294. — PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins.